Aturan Rantai
Turunan Tingkat Tinggi
Pendifferensialan Implisit
Laju Yang Berkaitan

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menggunakan aturan rantai dan menggunakannya untuk mencari turunan dari suatu fungsi
2. Menggunakan berbagai notasi dalam pencarian turunan
3. Menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi
4. Mencari turunan dari suatu fungsi secara implisit
5. Menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan laju yang berkaitan

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^2 = \frac{d}{dx}(x^2+1)(x^2+1)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^3 = \frac{d}{dx}(x^2+1)(x^2+1)^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2+1)^{20} = ????$$

$$\frac{d}{dx} sin3x = \frac{d}{dx}\sin(2x+x) = \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x+1)^2 = ????$$

Teorema (aturan rantai):

Misal $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit

$$y = f(g(x)) = fog(x)$$

Jika g terdiferensiasi di x dan f terdiferensiasi di $u = g(x)$

maka $y = f(g(x)) = fog(x)$ terdiferensiasi di x

g

dan $(fog)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$D_x y = D_u y D_x u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

1. Tentukan $D_x y$ jika

(i) $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 9)^9}$

UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

(ii) $y = \cos\left(\frac{3x^2}{x+2}\right)$

UNS

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

(iii) $y = x\sin^2 2x$

2. Buktikan $D_x x^r = r x^{r-1}$, untuk semua r bilangan rasional

$$y = f(u) \ u = g(x)$$

$$y' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$

$$D_x y = D_u y D_x u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$y = f(u) \ u = g(v) \ v = h(x)$$

$$y' = f'\big(g(h(x)\big)g'\big(h(x)\big)h'(x)$$

$$D_x y = D_u y \ D_v u D_x v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$

a. $y=[(x^2+1)\sin x]^3$

b. $y=\dfrac{(x^3+2x)^4}{x^4+1}$

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Turunan Tingkat Tinggi

Jika operasi pendiferensiasian dikenakan pada f diperoleh f',

disebut turunan pertama

Jika operasi pendiferensiasian dikenakan pada f' diperoleh f''

disebut turunan kedua

Jika operasi pendiferensiasian dikenakan pada f'' diperoleh f'''

disebut turunan ketiga

Turunan ke-	Notasi	Notasi	Notasi	Notasi Leibniz
1	f'	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
2	f''	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
3	f'''	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
4	$f^{(4)}$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
n	$f^{(n)}$	$y^{(n)}$	D_x^n	$\frac{d^n y}{dx^n}$

2

Soal :

1. Cari $\frac{d^3y}{dx^3}$

   a. $y = \frac{x}{2x+1}$

   b. $y = x\cos \pi x$

$$y^3 + 7y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = ...?$$

Teknik mencari $\frac{dy}{dx}$ tanpa terlebih dahulu menyatakan persamaan yang diberikan secara eksplisit sebagai $y = f(x)$ dinamakan pendiferensialan implisit

Soal :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui y adalah fungsi dari x

1. $y^5 + x^2 y^3 = 1 + x^4 y$

2. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$

a. $x^2 + y^2 = -1$

b. $x^2 + y^2 = 25$

Laju yang Berkaitan

Jika variabel y bergantung pada waktu t, maka $\frac{dy}{dt}$ disebut laju perubahan terhadap waktu. Jika y diberikan secara eksplisit sebagai fungsi t, maka masalah mencari $\frac{dy}{dt}$ dapat dilakukan denggan menggunakan berbagai cara yang sesuai dan telah kita pelajari sebelum ini.

Bisa jadi dalam suatu situasi kita tidak mengetahui secara eksplisit hubungan variabel y dengan variabel t, tapi kita mengetahui hubungan y dengan variabel x dan memiliki informasi tentang $\frac{dx}{dt}$. Dalam hal ini kita masih bisa mencari $\frac{dy}{dt}$, karena $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ adalah laju-laju yang berkaitan.

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Soal :

1. Balon dilepaskan dari suatu titik yang jauhnya 150m dari pengamat yang berada di tanah. Jika balon naik lurus ke atas dengan laju 8m/det, berapa laju perubahan jarak dari pengamat ketika balon berada pada ketinggian 50m

2. Air dituangkan ke dalam wadah yang berbentuk kerucut dengan laju $8m^3$/menit. Jika tinggi wadah adalah 12 m dan jari-jari tutupnya adalah 6m, berapa laju perubahan permukaan air ketika kedalaman air 4m

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

UNS

UNIVERSITAS
SEBELAS MARET