Turunan

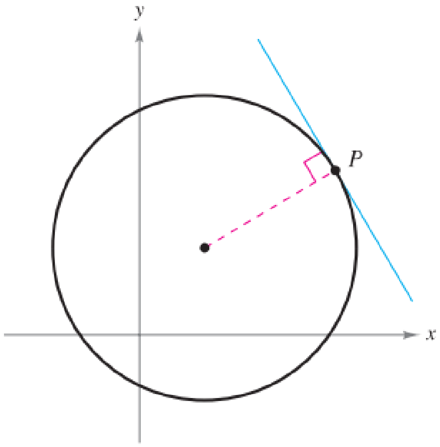
UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

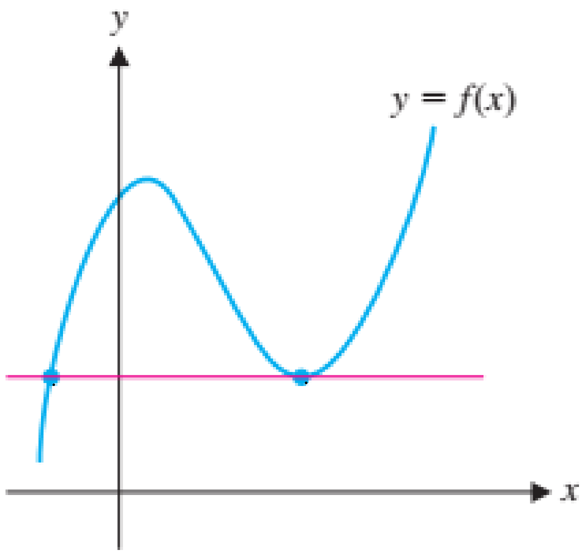
Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

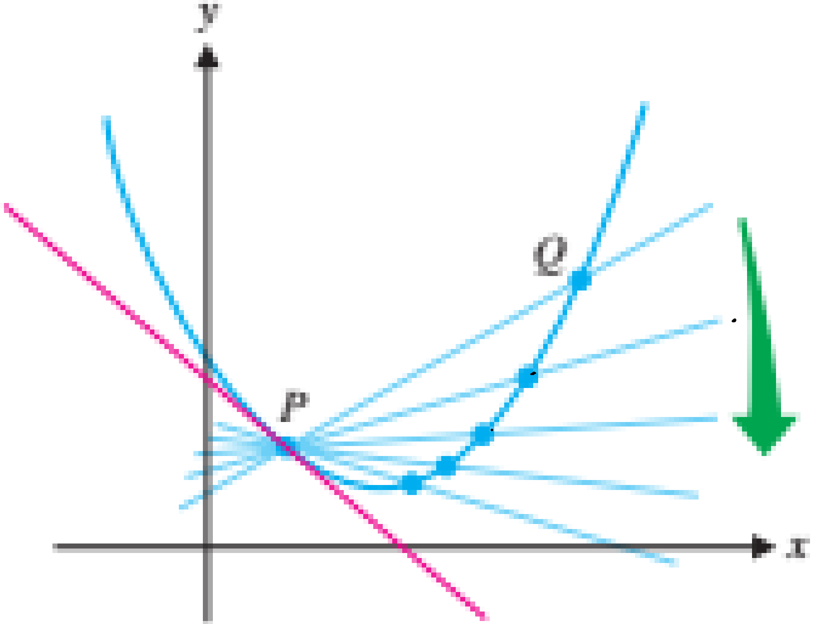
1. Memutuskan apakah suatu fungsi dapat diturunkan atau tidak di suatu titik
2. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan definisi
3. Menjelaskan hubungan antara keterdiferensialan dan kekontinuan
4. Mengidentifikasi kasus-kasus di mana suatu fungsi tidak dapat diturunkan
5. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan

UNIVERSITAS SEBELAS MARET



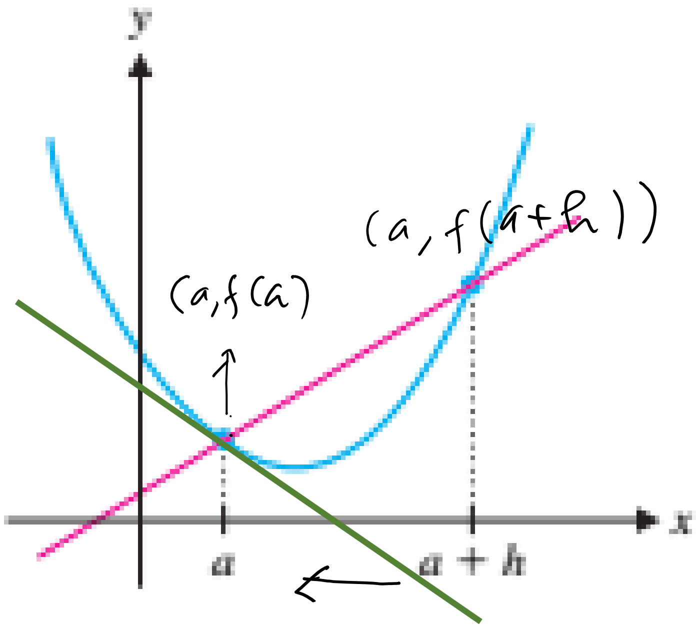


Gagasan Euclid bahwa garis singgung adalah garis yang menyinggung kurva di satu di titik benar untuk semua lingkaran tapi tidak untuk semua kurva

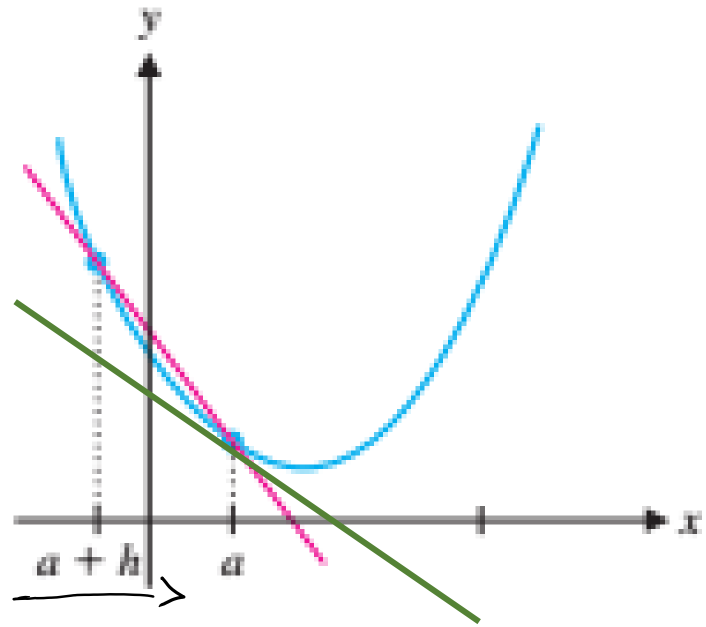


Garis singgung di titik P adalah pembatas dari tali busur – tali busur di sekitar titik P

https://www.geogebra.org/m/TymMwUtc



$(h > 0)$



$(h < 0)$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

https://www.geogebra.org/m/x3wYVGcu

https://www.geogebra.org/m/hrydE2FP

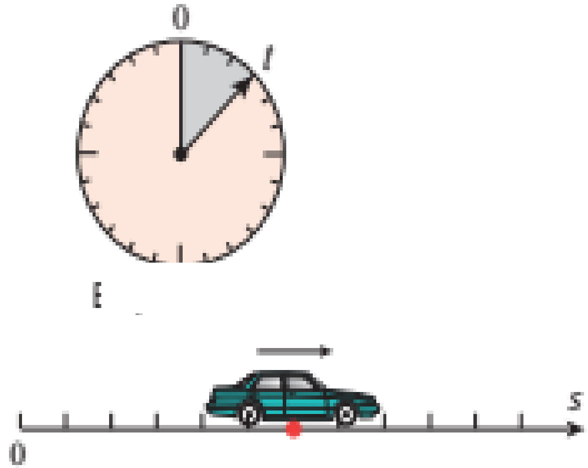
UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

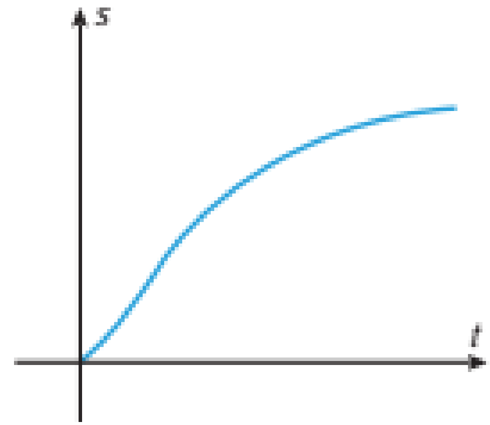
Definisi :

Garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ pada titik P$\big(a, f(a)\big)$ adalah garis yang melalui P dengan gradien

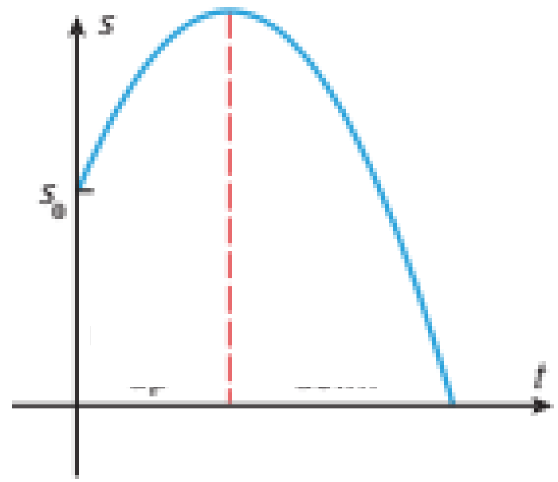
$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

asalkan limit tersebut ada , bukan ∞ atau $-\infty$





glb



glbb

Posisi suatu objek yang bergerak adalah fungsi dari waktu

Jika suatu objek bergerak pada sumbu-s sehingga posisinya setelah waktu tempuh t adalah $f(t)$, kecepatan rata-rata objek tersebut pada interval waktu $[a, a+h]$, $h > 0$

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Definisi :

Jika suatu objek bergerak pada sumbu-s sehingga posisinya setelah waktu tempuh t adalah $f(t)$, kecepatannya pada saat $t = a$ adalah

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

UNS

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Kecepatan sesaat dapat dilihat sebagai laju perubahan posisi objek yang bergerak terhadap waktu. Laju perubahan dapat ditemukan pada berbagai bidang kehidupan , misalnya :

- Ahli biologi mungkin tertarik dengan laju perubahan banyaknya bakteri dalam suatu koloni terhadap waktu
- Insinyur mungkin tertarik dengan laju perubahan panjang logam terhadap suhu
- Pengusaha mungkin tertarik dengan laju perubahan biaya produksi terhadap banyaknya barang yang diproduksi
- Ilmuwan kedokteran mungkin tertarik dengan laju perubahan jari-jari pembuluh darah arteri terhadap konsentrasi alkohol dalam darah

Kita akan menyatakan gagasan tentang laju perubahan tersebut secara matematis tanpa menggunakan kosa kata atau istilah yang tergantung pada terapannya

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Definisi :

Fungsi f' yang nilainya pada x ditentukan oleh

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dinamakan turunan dari f terhadap x

https://www.geogebra.org/m/SVRssepW

Daerah asal f' adalah himpunan semua x pada daerah asal f di mana limit tersebut ada, bukan ∞ atau $-\infty$

Dikatakan f terdiferensiasi di $x = a$ jika $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ada

Pencarian turunan disebut diferensiasi , bagian kalkulus yang yang berhubungan dengan turunan disebut kalkulus diferensial

Soal :

Selesaikan soal-soal berikut dengan menggunakan definisi

1. Misal $g(x)=\dfrac{2}{x+3}$, tunjukkan bahwa fungsi g terdiferensiasi di titik $x=2$

   kemudian tentukan $g'(2)$

2. Misal $f(x) = \sqrt{x}$, tentukan rumus fungsi $f\,'$ dan daerah asalnya

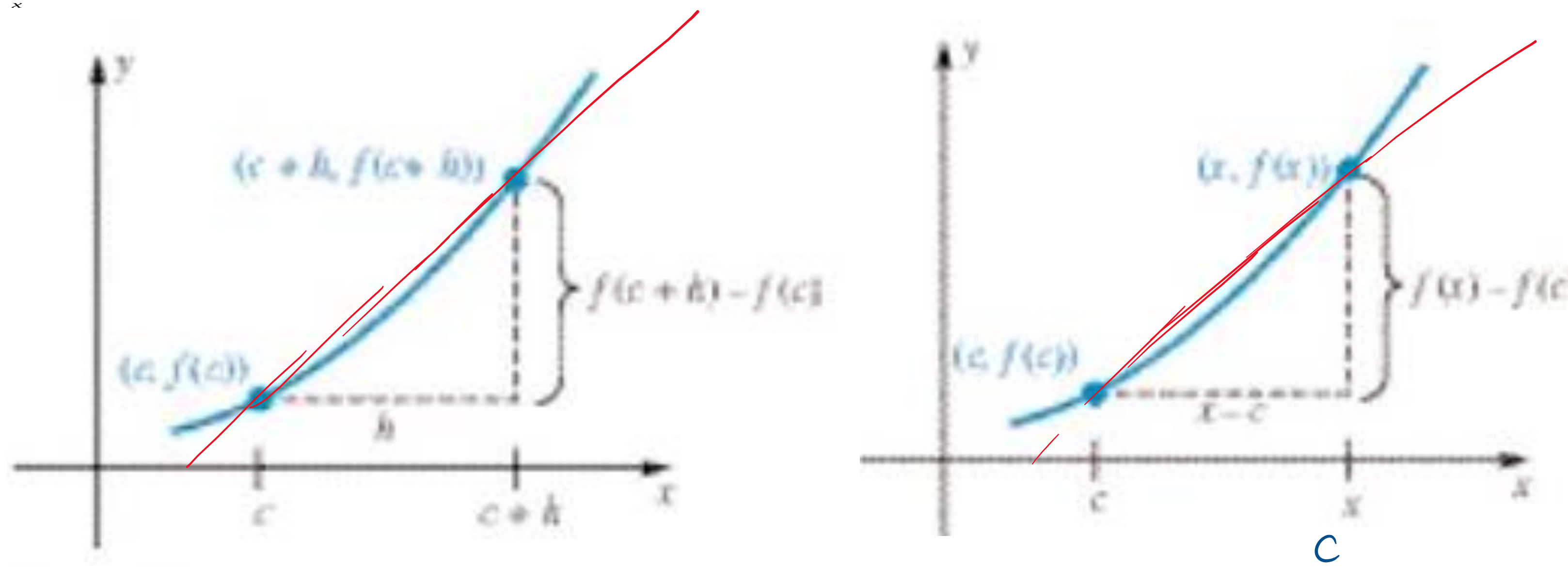
Penggunaan huruf h dalam definisi yang dituliskan di atas bukan sesuatu yang keramat

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
$$= \lim_{p \to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p}$$
$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s}$$

UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

$x - c$ h

, x



Dengan menggantikan $c+h$ dengan x dan h dengan $x-c$

maka

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Teorema :

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c

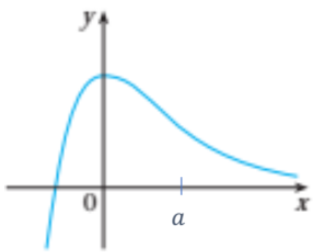
Soal

Buktikan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tapi tidak terdiferensiasi di 0

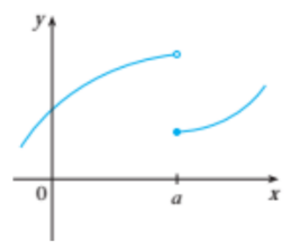
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

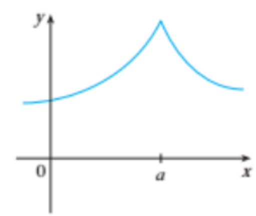
Kaitan eksistensi $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ dengan perilaku grafik fungsi f di titik $(a, f(a))$

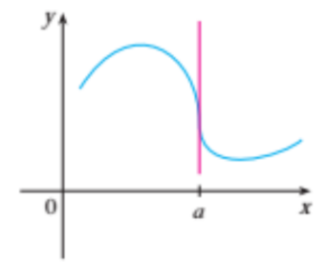
- $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ada

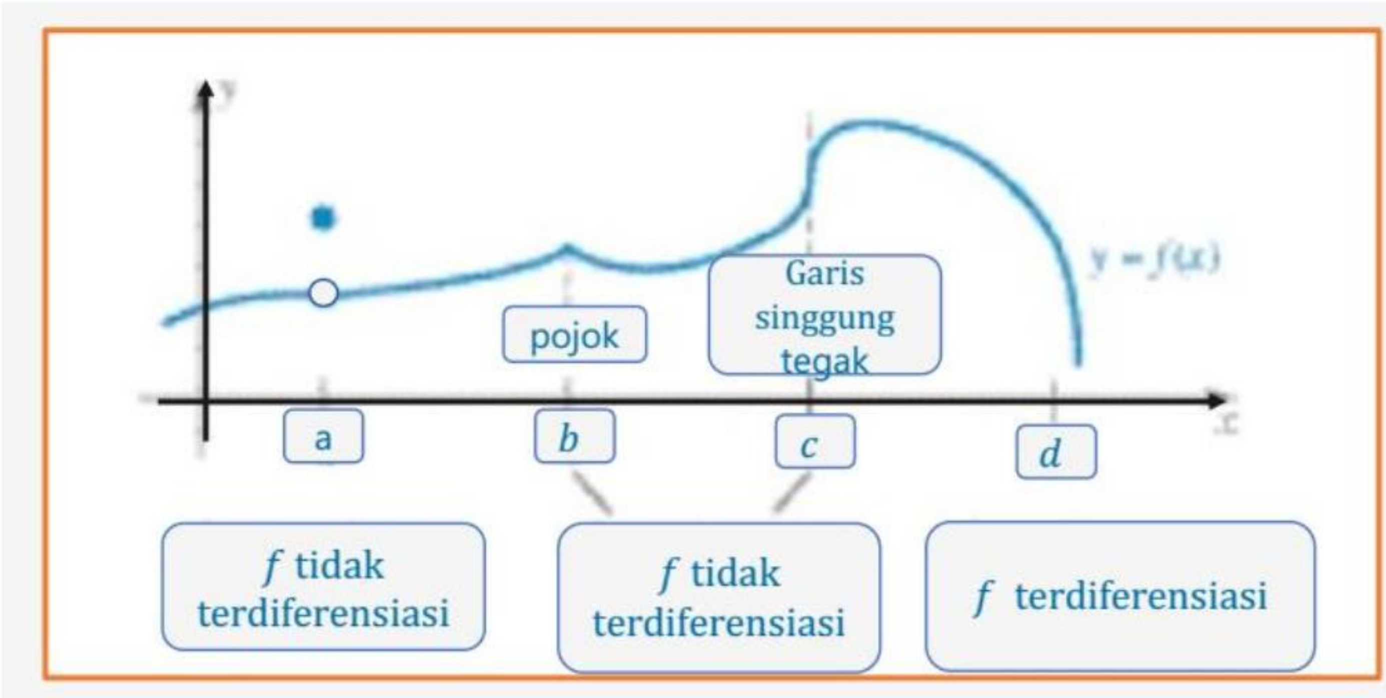


- $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tidak ada



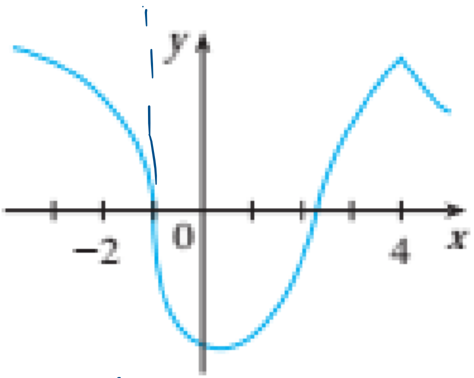






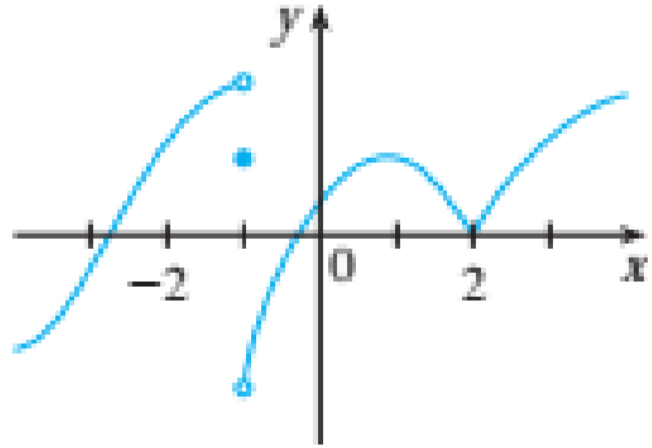
y = f(x)
pojok
Garis singgung tegak
a
b
c
d
f tidak terdiferensiasi
f tidak terdiferensiasi
f terdiferensiasi

1



$y = f(x$

2



~~Tentukan~~ titik-titik di mana :

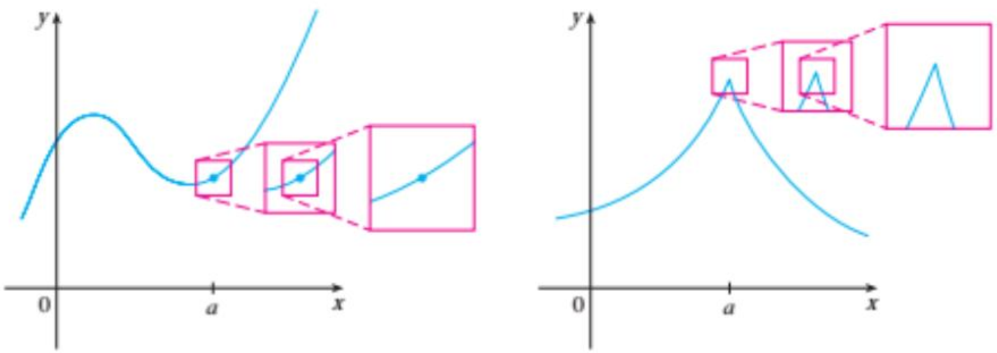
a. f tidak kontinu

b. f tidak terdiferensial

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Komputer grafik memberikan cara lain untuk melihat keterdiferensiasian di suatu titik.

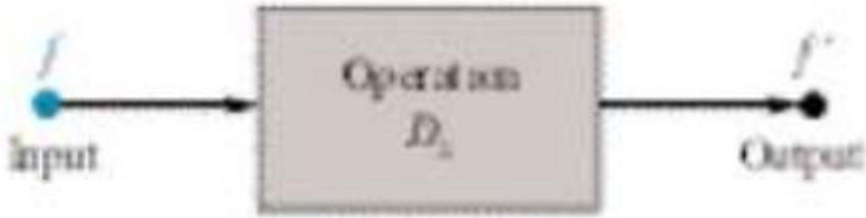
grafik di sekitar titik $(a, f(a))$ makin terlihat seperti sebuah garis lurus bila di perbesar (zoom) di sekitar titik tersebut $\Longleftrightarrow$ terdiferensiasi di titik $(a, f(a))$



https://www.geogebra.org/graphing

Proses untuk mencari turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan dapat membutuhkan waktu dan menjemukan. Berikut ini kita akan membangun alat yang membantu kita untuk memotong proses tersebut , dan memungkinkan kita mencari turunan dari fungsi-fungsi yang lebih rumit.

Turunan dari fungsi f adalah fungsi lain . Kita sering menggunakan simbol D_x untuk menunjukkan operasi pencarian turunan. Simbol D_x mengatakan bahwa kita menentukan turunan terhadap variabel x. D_x adalah contoh operator.



UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Aturan Pencarian Turunan :

1. *Jika* $f(x) = k$, k *konstanta maka* $f'(x) = 0$, *atau* $D_x k = 0$
2. *Jika* $f(x) = x$ *maka* $f'(x) = 1$ *atau* $D_x x = 1$
3. *Jika* $f(x) = x^n$, n *bilangan positif maka* $f'(x) = nx^{n-1}$ *atau* $D_x x^n = nx^{n-1}$
4. *Jika* f *terdiferensial dan* k *konstanta maka* $(kf)'(x) = kf'(x)$ *atau*
   $D_x(kf(x) = kD_x f(x)$
5. *Jika* f *dan* g *terdiferensial, maka*
   (i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *atau* $D_x(f+g)(x) = D_x f(x) + D_x g(x)$
   (ii) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ *atau* $D_x(f-g)(x) = D_x f(x) - D_x g(x)$
   (iii) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *atau* $D_x(fg)(x) = g(x)D_x f(x) + f(x)D_x g(x)$
   (iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$ *atau*

   $$D_x\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$$

UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Dengan menggunakan aturan pencarian turunan di atas kita dapat menunjukkan bahwa fungsi polinomial dapat diturunkan di mana-mana dan fungsi rasional juga dapat diturunkan di mana-mana kecuali di titik-titik di mana penyebutnya bernilai 0.

Soal :

1. Tentukan $D_x y$

a. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$

b. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

Soal :

Tunjukkan bahwa aturan pangkat berlaku untuk pangkat bilangan bulat negatif , yakni $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$ dengan n bilangan bulat positif

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Dengan menggunakan kedua fakta diatas, dapat ditunjukkan bahwa :

$$D_x \sin x = \cos x \qquad D_x \cos x = -\sin x$$

$$D_x \sin x = \cos x$$

Soal :

Tentukan

a. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

b. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x \sin x}$

Soal

1. Diberikan $h(x) = x(|x| - 2)$

   a. tentukan titik-titik dimana h terdiferensiasi dan di mana h tidak terdiferensiasi

   b. tentukan rumus fungsi h' dan daerah asal h'

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

2. Misal

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{jika} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{jika} \quad x = 0 \end{cases}$$

a. Periksa apakah f terdiferensiasi di $x = 0$

b. Tentukan rumus fungsi f'

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

UNS

UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

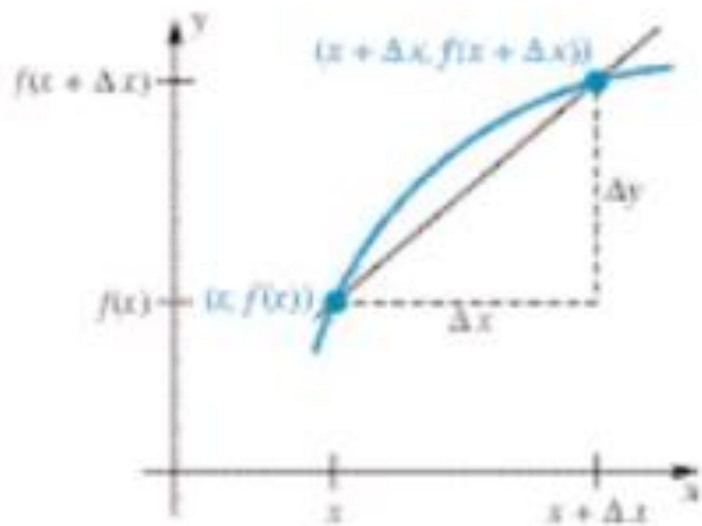
.

3. Soal :

Misal

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

Tentukan m dan b sehingga f terdiferensiasi dimana-mana



Misal terjadi perubahan x ke $x + \Delta x$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$

UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET