

Bab II

Bidang Datar

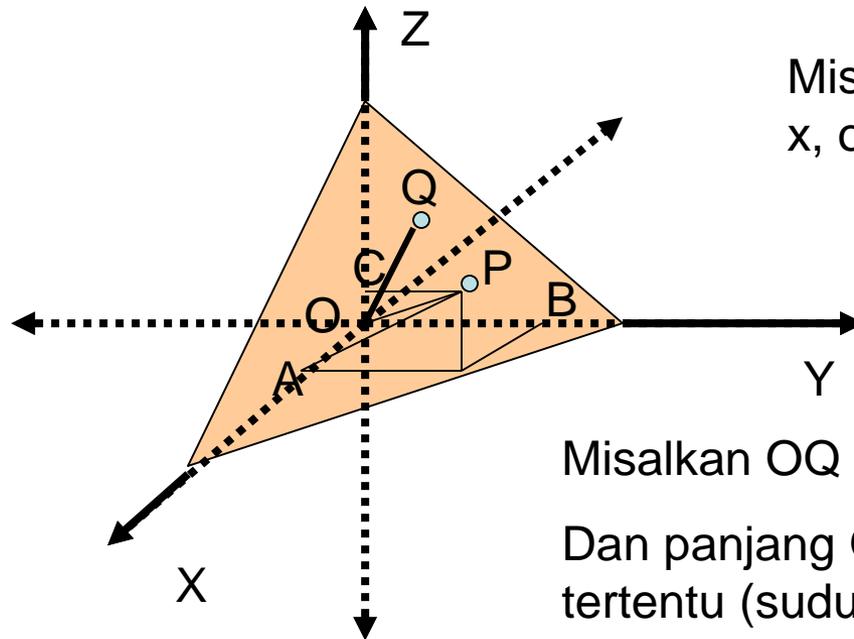
Persamaan Bidang Datar

- Perhatikan

Misalkan P adalah sebarang titik pada bidang v

Q adalah proyeksi O pada bidang v shg OQ tegak lurus v

Misal $P(x,y,z)$ berarti absis x , ordinat y dan aplikat z



Misalkan OQ memiliki sudut arah α, β, γ

Dan panjang $OQ=p$ maka bidang v sudah tertentu (sudut arah dan jarak ke O)

Jumlah panjang Proyeksi OA, OB dan OC pada OQ adalah $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$

Panjang Proyeksi ini sama dengan panjang proyeksi OP pada OQ

- Jadi $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = p$
- Karena P sebarang titik pada v, berarti setiap titik di v, berarti persamaan bidang v dalam bentuk normal :
 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = p$
- Jika v melalui $O(0,0,0)$ berlaku :
 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = 0$

Merubah Bentuk Pers Bid

- Misalkan pers bid $Ax + By + Cz + D=0$
- Berarti $\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} = \frac{-p}{D}$
- Misalkan $\cos \alpha = \lambda A$; $\cos \beta = \lambda B$; $\cos \gamma = \lambda C$ dan $p = -\lambda D$
- Karena $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
maka dipenuhi $\lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1$
atau $\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- Dengan demikian didapat

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad p = \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Karena p harus positif maka

$$p = \left| \frac{-D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Sudut arah dan Bilangan Arah

- Persamaan Bidang : $Ax + By + Cz + D=0$
berarti A , B dan C bilangan arah
- $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos \gamma =p$
berarti α , β dan γ disebut sudut arah

Bentuk Lain Pers Bid

1. Jika pers bid datar : $Ax + By + Cz + D = 0$ maka ditentukan

*) titik pot dgn Sb X dgn mengambil $y=z=0$, shg didpt $x = - (D/A)$ ($A \neq 0$)

**) ditentukan titik pot dgn Sb Y dan Sb Z $y = - (D/B)$ ($B \neq 0$) dan $z = - (D/C)$ ($C \neq 0$)

Misalkan secara berturut-turut titik pot-nya adlh a, b dan c mk pers tsb dpt ditulis :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 \iff \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

2. Persamaan bidang datar melalui sebuah titik tertentu.

Misalkan sebuah titik P (x₁, y₁, z₁) terletak pada bidang datar : Ax + By + Cz + D = 0 berarti dipenuhi Ax₁ + By₁ + Cz₁ + D = 0 atau

$$**D = - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)**$$

Bila disubstitusikan ke bidang datar didapat Ax + By + Cz - (Ax₁ + By₁ + Cz₁) = 0 akibatnya

$$**A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.**$$

Bentuk terakhir menunjukkan persamaan bidang melalui sebuah titik P(x₁, y₁, z₁)

Bidang datar melalui tiga titik

- **Misalkan titik $P_i (x_i, y_i, z_i)$ dengan $i = 1, 2, 3$ dan misalkan dari tiga titik tersebut akan dibuat bidang datar $Ax + By + Cz + D = 0$.**
- **Karena melalui tiga titik tersebut, maka koefisien A, B, C dan D harus memenuhi :**
 - $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ (i)**
 - $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ (ii)**
 - $Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$ (iii)**
- **Jika tiga titik tersebut tidak terletak pada garis lurus maka dapat ditentukan A, B, C dan D kemudian disubstitusikan pada $Ax + By + Cz + D = 0$.**

Dengan demikian, untuk menentukan persamaan bidang melalui tiga titik tersebut dengan melenyapkan A, B, C dan D dari persamaan :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

Atau dengan determinan dapat ditulis :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jadi bentuk terakhir adalah cara menentukan persamaan bidang datar melalui tiga titik.

Contoh soal

Tentukan persamaan bidang datar yang :

- Melalui $(-1, 2, 4)$ dan sejajar bid $2x - 3y - 5z + 6 = 0$
- Melalui $(3, -2, -4)$ yang horisontal
- Melalui $(2, 1, 1)$ dan $(3, 2, 2)$ serta tegak lurus dgn bid datar $x + 2y - 5z - 3 = 0$.

Jarak Titik ke bidang

Misalkan sebuah bidang datar W dengan persamaan dari normal Hesse adalah

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

dan sebuah titik sebarang P (x₁, y₁, z₁)

Tentukan jarak P ke bidang tersebut.

Untuk menentukan jarak, lakukan langkah berikut.

- a. Buat pers bidang melalui P dan sejajar dengan bidang W, yaitu.**

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - (p \pm d) = 0$$

- b. Karena P terletak pada bidang maka dipenuhi**

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - (p \pm d) = 0$$

Dari bentuk tersebut dapat ditentukan

$$d = | x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p |$$

Selanjutnya jika persamaannya dinyatakan dalam bentuk $Ax + By + Cz + D = 0$ maka jarak $P(x_1, y_1, z_1)$ dapat ditentukan

$$d = \left| \frac{A x_1 + B y_1 + C z_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

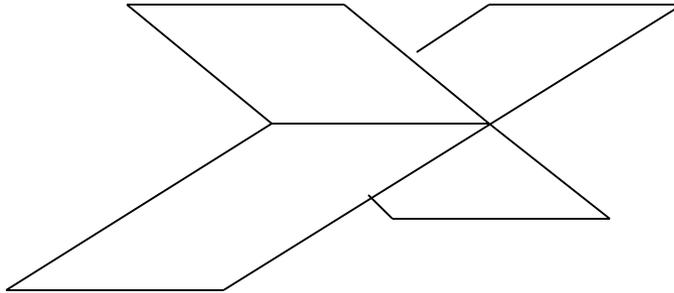
Selanjutnya untuk menentukan jarak dua bidang sejajar, langkahnya sbb.

- a. Tetapkan satu titik pada salah satu bidang
- b. Tentukan jarak titik tersebut pada bidang yang kedua.

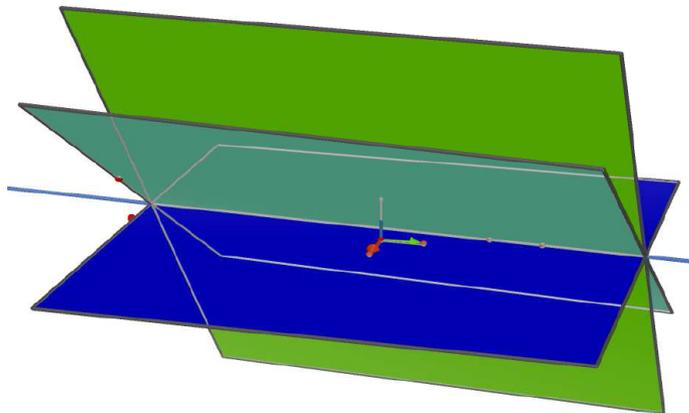
Contoh.

1. Tentukan jarak titik $P(2,1,1)$ ke bidang $x - 2y + 2z - 3 = 0$
2. Tentukan pers bid datar yang tegaklurus $3x - y + z = 0$ dan $x + 5y + 3z = 0$ serta berjarak $\sqrt{6}$ dari titik asal.
3. Tentukan jarak bidang $2x + y + z = 5$ ke bidang $8 - 2x - y - z = 0$

- **Berkas Bidang Datar**



Misalkan $V1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 y + D_1 = 0$ dan
 $V2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 y + D = 0$ adalah saling
berpotongan ;
Maka $V1 + \lambda V2 = 0$ dengan λ parameter, menyatakan
himpunan bidang datar yang melalui garis potong $V1$ dan $V2$.



Jika $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ sejajar maka $V_1 + \lambda V_2 = 0$ menyatakan semua bidang datar dalam ruang yang sejajar dengan kedua bidang datar ini.

Jika $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ berimpit maka $V_1 + \lambda V_2 = 0$ menyatakan bidang itu juga untuk semua nilai λ

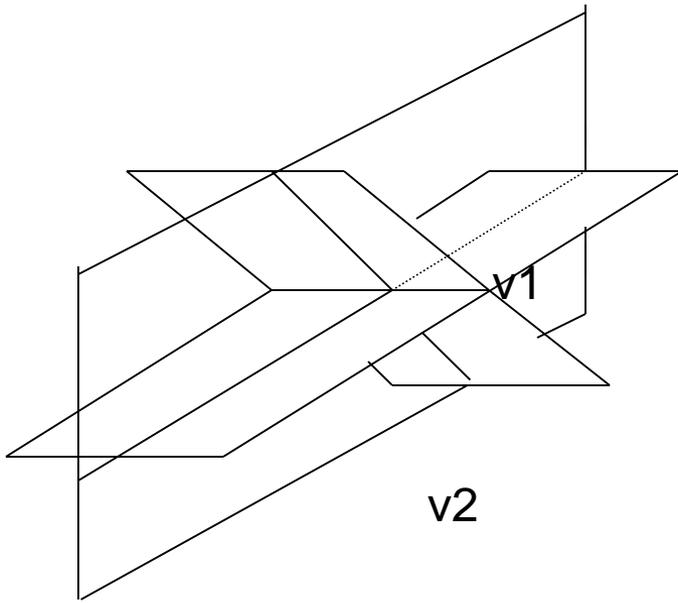
Contoh

Tentukan bidang datar W yang melalui garis potong $V_1 \equiv x - 3y + z - 7 = 0$ dan $V_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ serta :

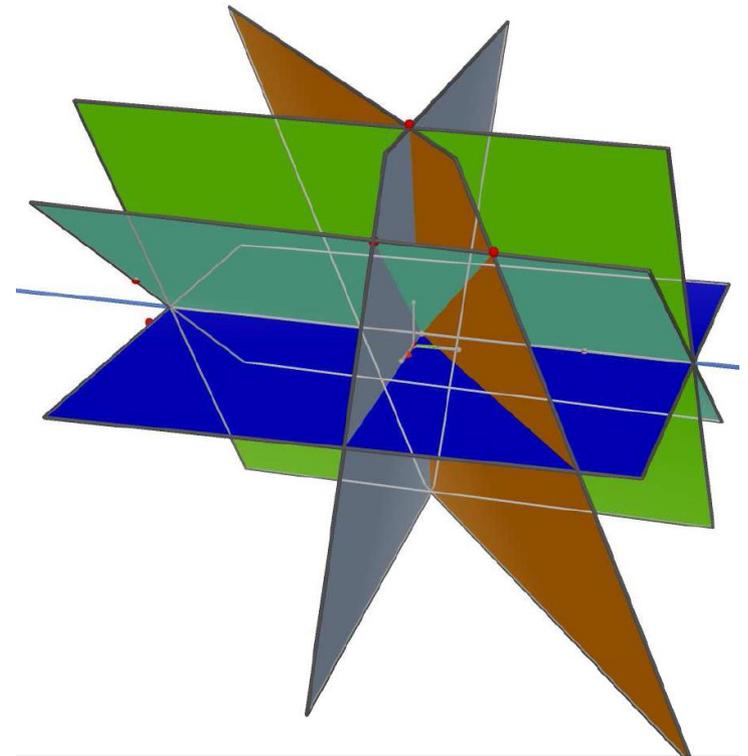
- a. Tegak lurus bidang $V_3 \equiv x - 2y + 3z + 7 = 0$**
- b. Sejajar bidang $V_4 \equiv 2x + y + 3z - 4 = 0$**

Jaringan Bidang

Misalkan diketahui $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ dan $V_3 = 0$ pers bidang yang saling berpotongan dan tidak terletak pada satu berkas yang sama, maka persamaan : $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ menyatakan himpunan bidang datar yang dinamakan Jaringan Bidang Datar. Himpunan bidang datar dari jaringan akan melalui titik potong ketiga bidang tersebut.



V_3



contoh

Diketahui tiga bidang datar

$$V_1 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0,$$

$$V_2 \equiv -2x + y + 3z - 3 = 0,$$

$$V_3 \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$$

Selidiki apakah ketiga bidang datar tersebut berpotongan pada satu titik, jika ya tentukan bidang datar yang melalui titik potong tersebut dan sejajar dengan

$$V_4 \equiv x - y - 2z + 3 = 0$$

Contoh.

- 1. Tentukan pers bid datar yang :**
 - a. MII $(-1, 2, 4)$ d sjjr bid $2x - 3y - 5z + 6 = 0$**
 - b. MII $(3, -2, -4)$ yang horisontal**
 - c. MII $(2, 1, 1)$ dan $(3, 2, 2)$ serta tegak lurus dengan bidang datar $x + 2y - 5z - 3 = 0$.**