

Integral atas  
Daerah bukan Persegi Panjang

## Definisi :

Misal  $f$  fungsi dua peubah yang terdefinisi pada persegi panjang  $R$

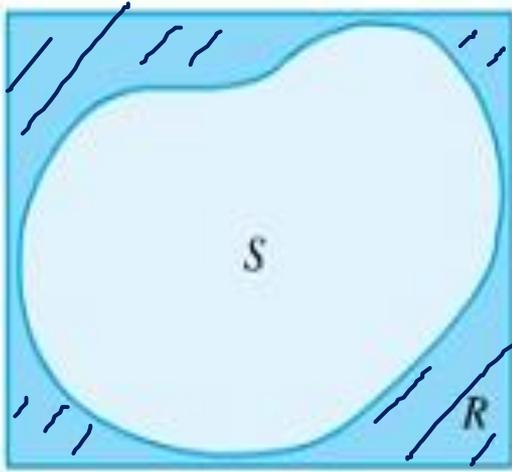
Jika  $\lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$  ada, kita katakan  $f$  dapat diintegrasikan pada  $R$

Lebih lanjut  $\iint_R f(x, y) dA$  disebut integral rangkap  $f$  pada  $R$  diberikan oleh  $\iint_R f(x, y) dA = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \Delta A_k$

Integral lipat ( integral berulang ) pada  
 $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$

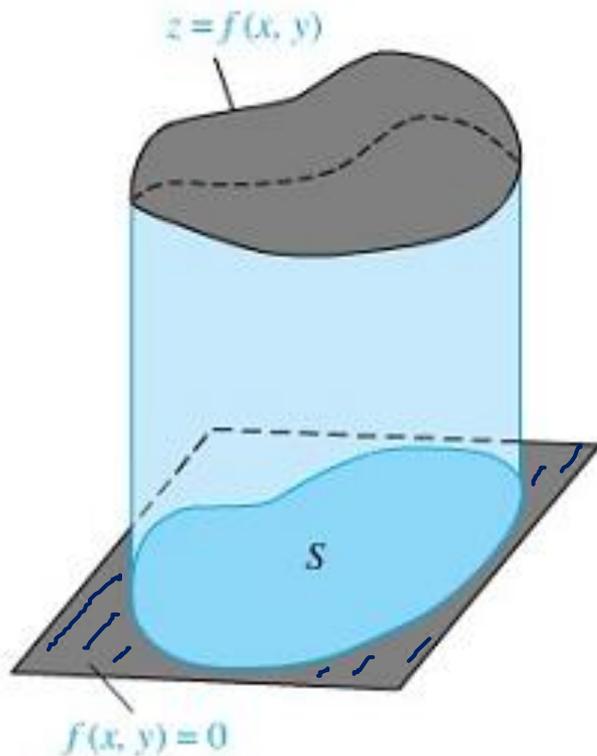
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$



Misal  $S$  sebarang himpunan  
tutup terbatas

Kelilingi  $S$  dengan persegi  
panjang  $R$  yang sisi-sisinya  
sejajar sumbu-sumbu koordinat



Misal  $f(x, y)$  terdefinisi dan  
 $f(x, y) = 0$  pada bagian dari  
 $R$  yang terletak di luar  $S$

Kita katakan  $f$  terintegralkan  
pada  $S$  jika dia terintegralkan  
pada  $R$  dan ditulis

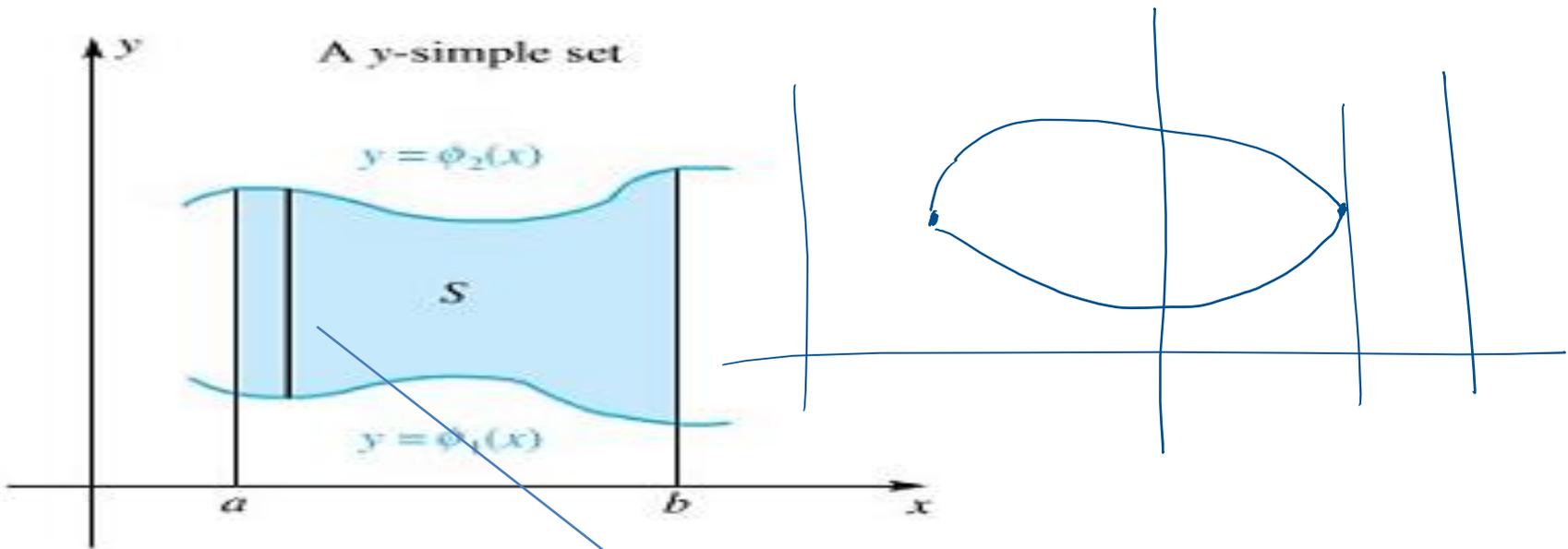
$$\iint_S f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA$$

Integral rangkap pada himpunan  $S$  secara umum memenuhi sifat :

- (i) linier
- (ii) aditif ( pada himpunan-himpunan yang berpotongan pada suatu kurva mulus )
- (iii) perbandingan

$S$  dikatakan himpunan  $y$  sederhana jika terdapat  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  yang kontinu pada  $[a, b]$  sedemikian sehingga

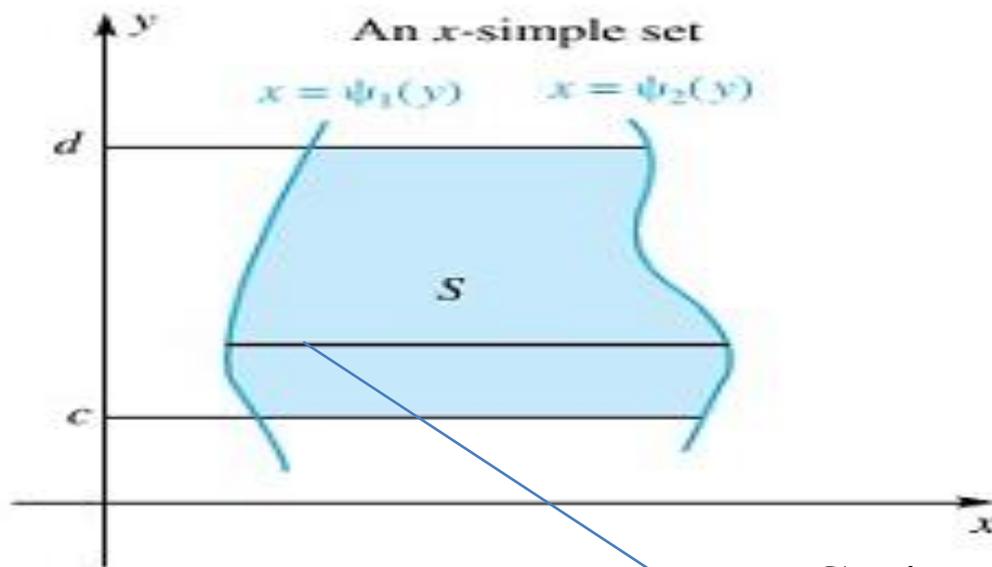
$$S = \{(x, y) : \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), a \leq x \leq b\}$$



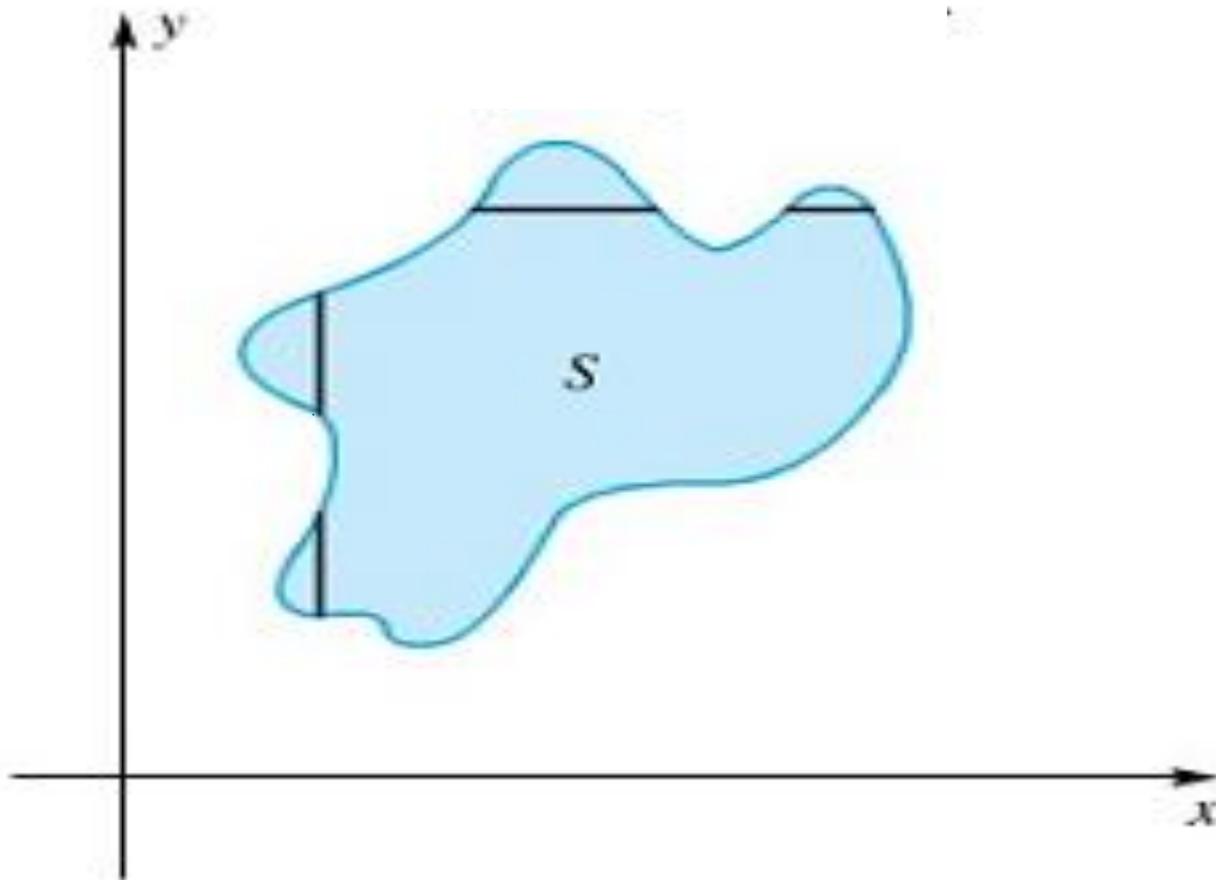
Garis dalam arah sumbu  $-y$  memotong  $S$  pada satu ruas garis atau satu titik atau tidak memotong sama sekali

S dikatakan himpunan  $x$  sederhana jika terdapat  $\psi_1$  dan  $\psi_2$  yang kontinu pada  $[c, d]$  sedemikian sehingga

$$S = \{(x, y): \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

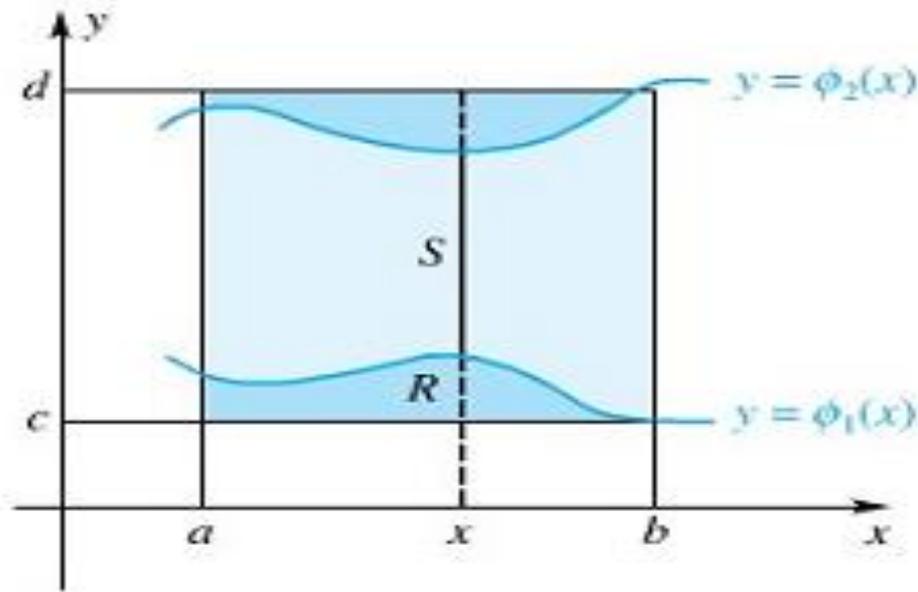


Garis dalam arah sumbu- $x$  memotong  $S$  pada satu ruas garis atau satu titik atau tidak memotong sama sekali



S himpunan  $y$  sederhana ?

S himpunan  $x$  sederhana ?



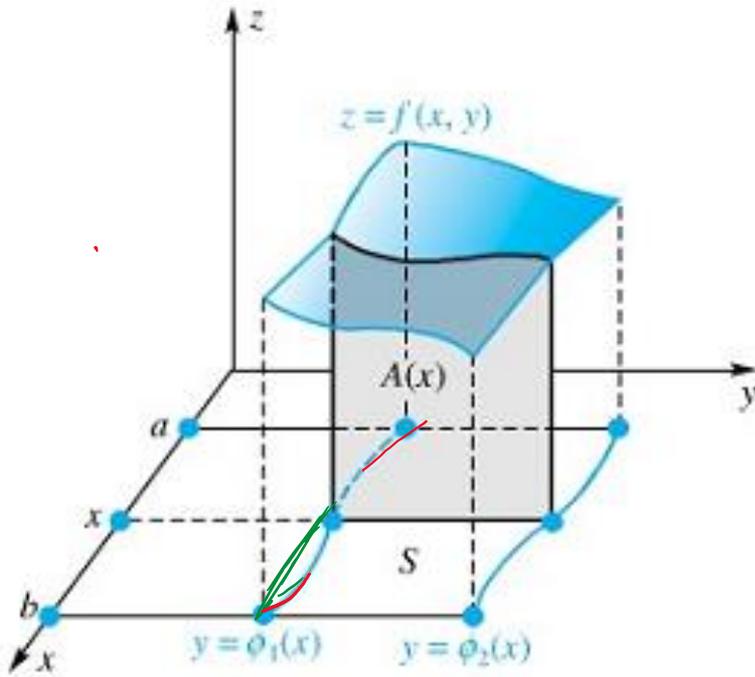
Misal  $S$  himpunan  $y$  sederhana

$$S = \{(x, y): \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

dengan  $\phi_1$  dan  $\phi_2$  kontinu pada  $[a, b]$

Kelilingi  $S$  dengan persegi panjang  $R$  yang sisi-sisinya sejajar sumbu-sumbu koordinat

Misal  $f(x, y)$  terdefinisi dan  $f(x, y) = 0$  pada bagian dari  $R$  yang terletak di luar  $S$



Volume benda pejal di bawah permukaan :  $V = \int_a^b A(x)dx$

Pandang  $A(x)$  sebagai luas daerah dibawah kurva  $f(x, y)$

dengan  $x$  konstan, maka  $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy$

Volume benda pejal di bawah permukaan :

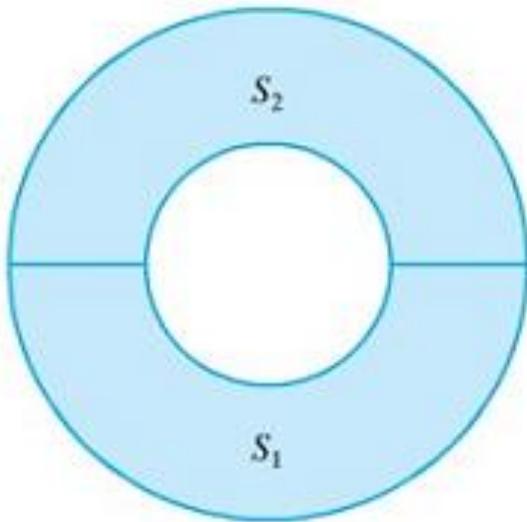
$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dydx$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

$$\iint_S f(x, y) dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Bagaimana jika  $S$  bukan himpunan  $y$  sederhana dan bukan himpunan  $x$  sederhana ?

Contoh :



Pandang  $S$  sebagai

gabungan himpunan

$S_1$  dan  $S_2$  dengan

$S_1$  dan  $S_2$  adalah

himpunan  $y$  sederhana

Soal :

Hitung integral lipat

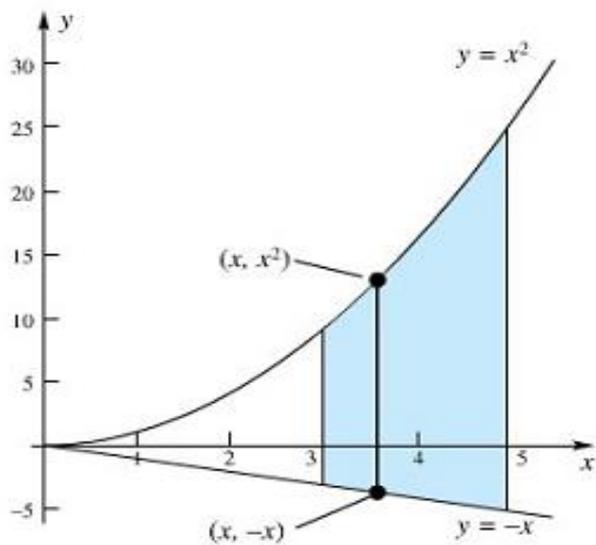
$$\int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy$$

$$\textcircled{1} \int_3^5 \int_{-x}^{x^2} (4x + 10y) dy dx$$



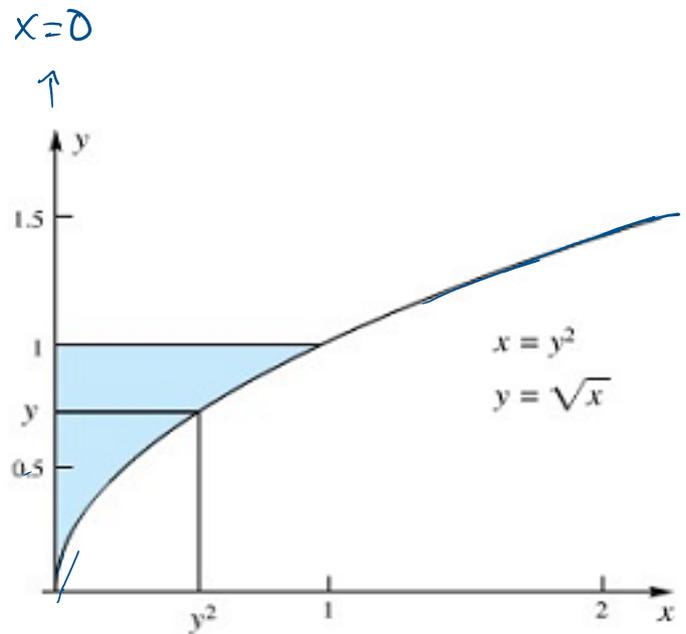
Daerah integrasi :



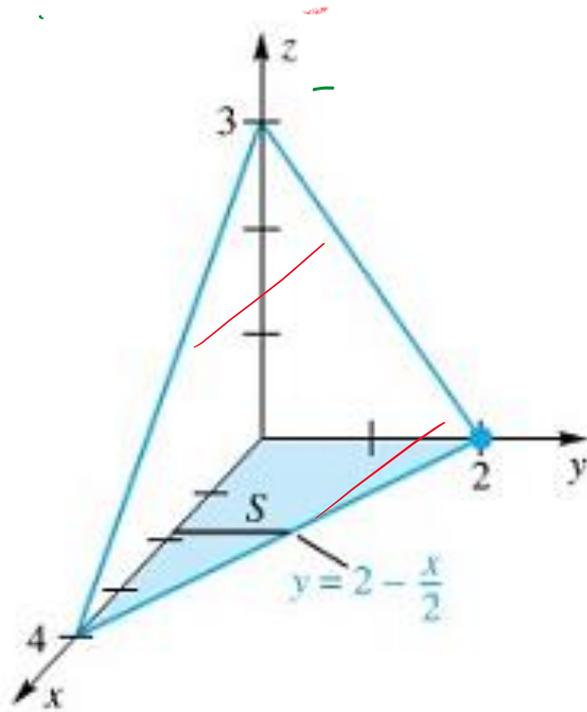
$$\int_0^1 \int_0^{y^2} 2ye^x dx dy$$



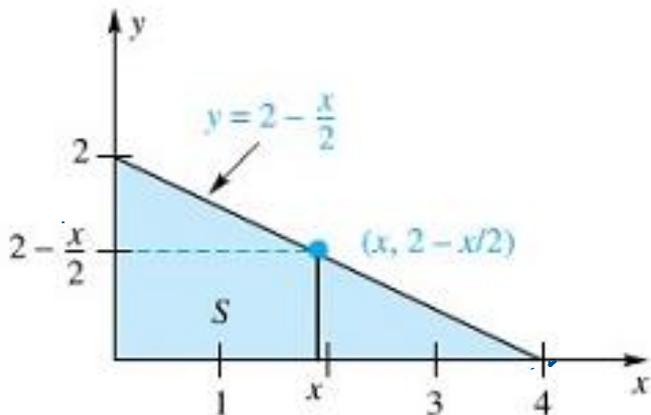
Daerah integrasi

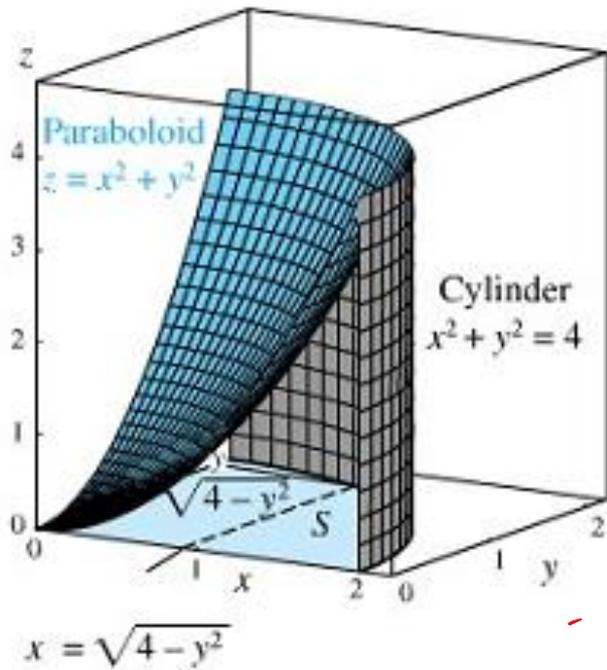


Gunakan integral rangkap untuk menghitung :  
2 volume tetrahedron yang dibatasi oleh  
bidang-bidang koordinat dan bidang  
 $3x + 6y + 4z - 12 = 0$ .



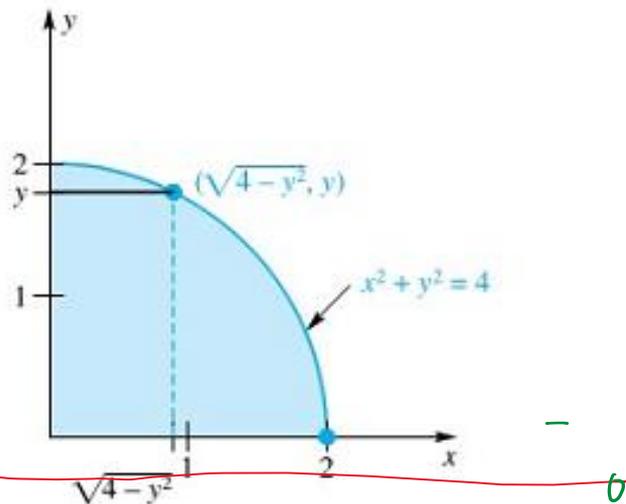
Daerah integrasinya :





Gunakan integral rangkap untuk menghitung :  
 volume benda pejal di oktan pertama yang  
 dibatasi oleh paraboloid  $z = x^2 + y^2$  dan  
 silinder  $x^2 + y^2 = 4$ .

Daerah integrasinya :



Soal :

Dengan mengubah urutan pengintegralan hitung

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dy dx$$

