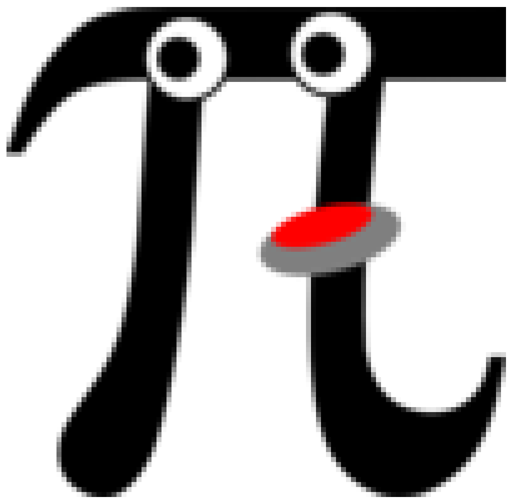
Definisi

Misal f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tutup $[a,b]$. Jika $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada kita katakan f terintegralkan pada $[a,b]$. Lebih lanjut $\int\limits_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (integral Riemann) dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$



Integral atas Persegi Panjang

Misal R persegi panjang dengan sisi-sisi yang sejajar dengan bidang koordinat

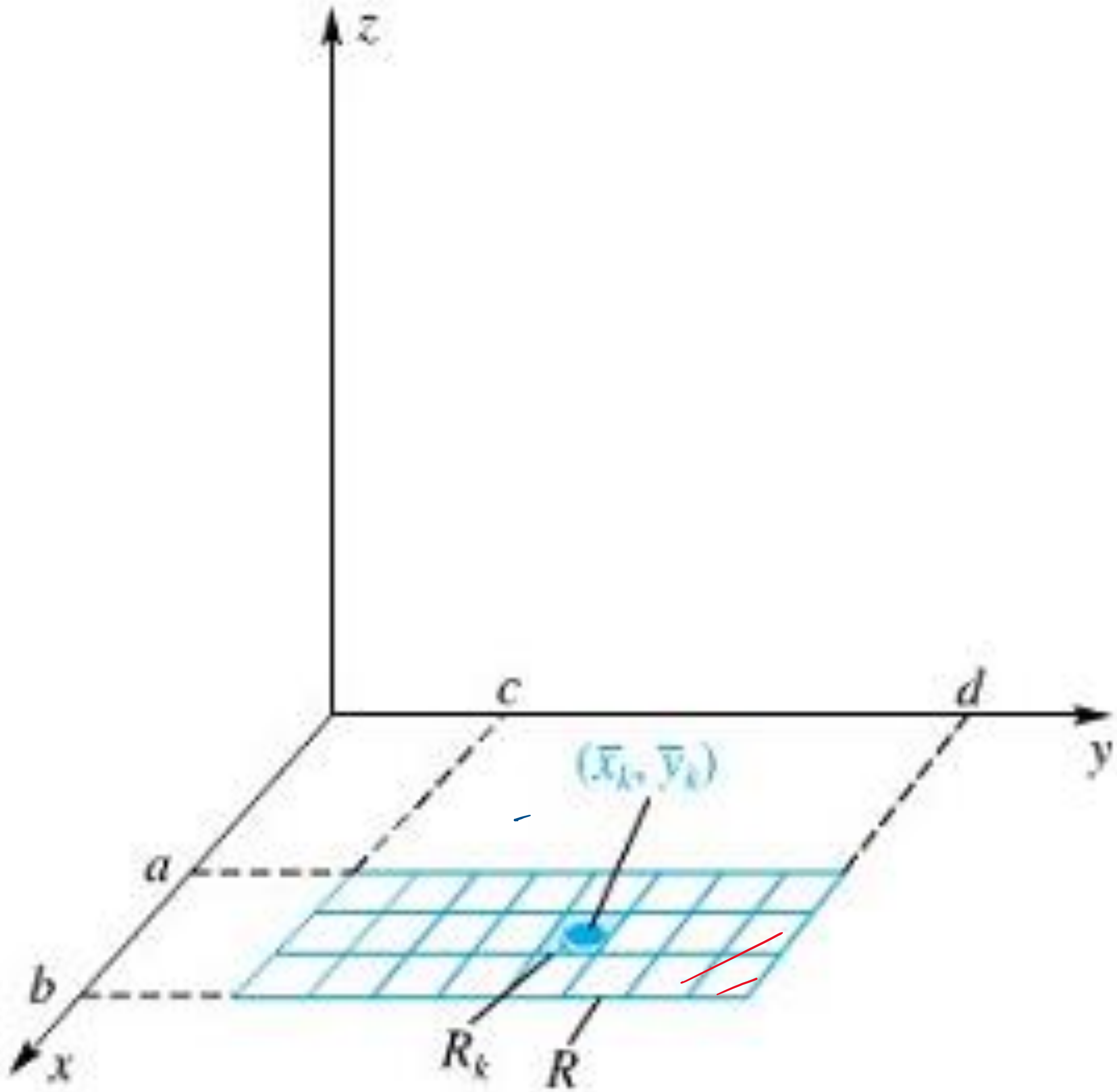
$$R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Bentuk partisi dari persegi panjang R menggunakan garis –garis yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat

R terbagi jadi persegi panjang –persegi panjang bagian - katakan banyaknya n - yang masing-masingnya di notasikan dengan $R_k, k = 1, 2, \ldots, n.$

Misal panjang sisi-sisi setiap persegi panjang bagian dinyatakan dengan Δx_k dan Δy_k, dan misal luasnya $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$

Pada setiap persegi panjang bagian ambil sebarang titik – namakan titik sampel - $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$

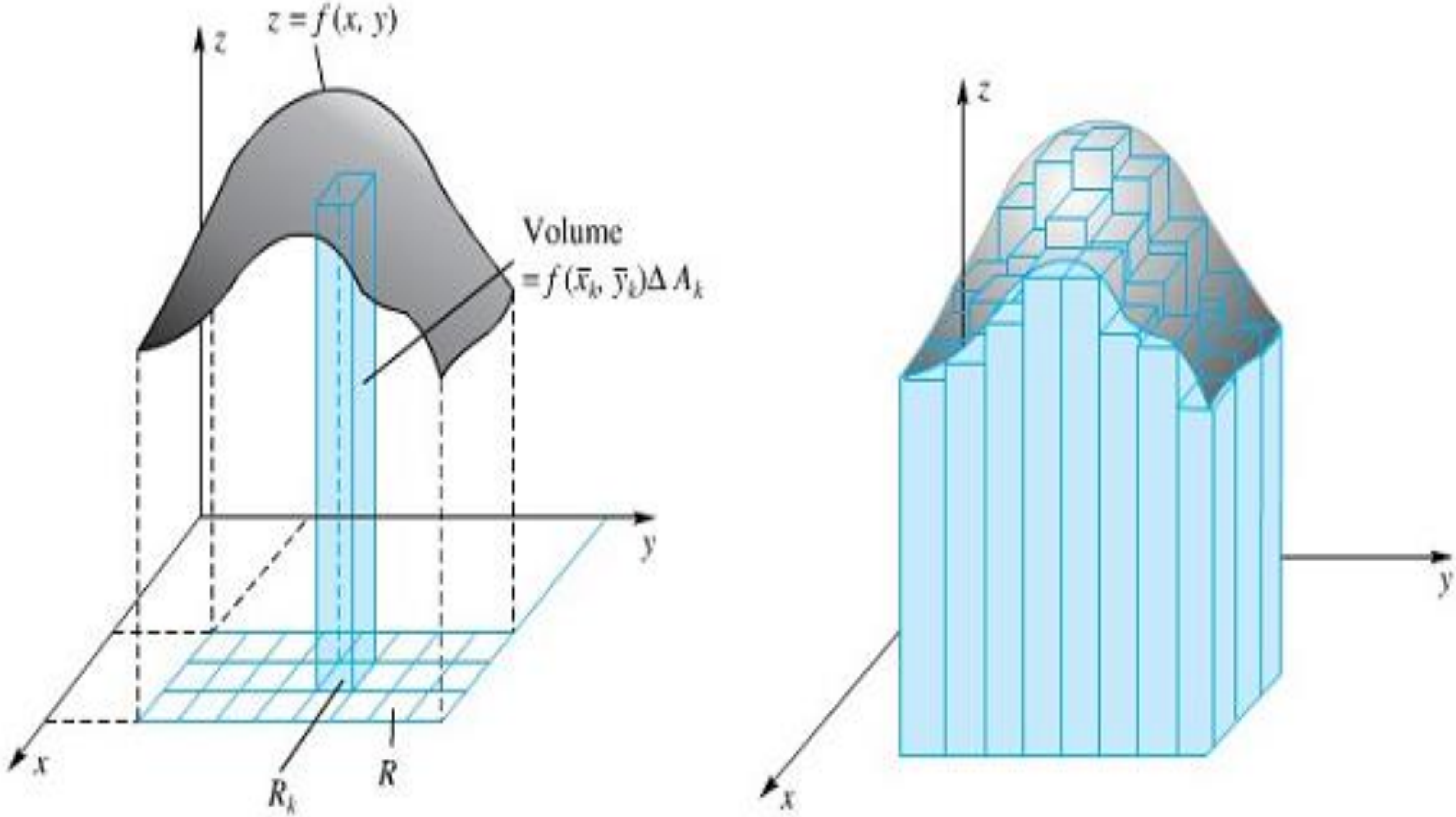


z
c
d
y
$(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$
a
b
x
R_k
R

Jumlah Riemann dari f atas persegi panjang R

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k)\, \Delta A_k$$

Tafsiran geometris jumlah Riemann : $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\Delta A_k$

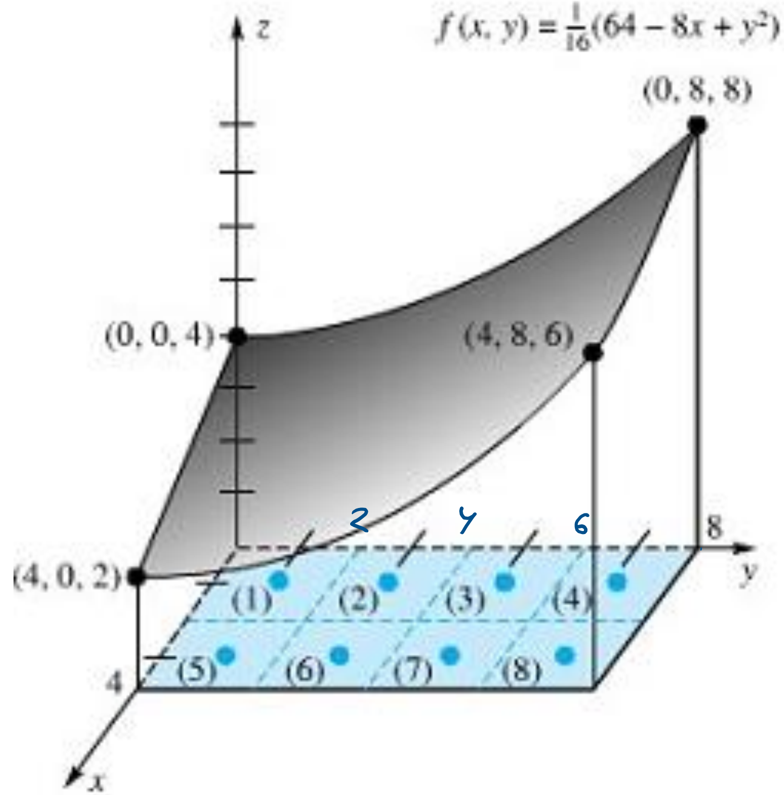


Soal :

Misal $$f(x, y) = \frac{64 - 8x + y^2}{16}$$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 8\}$$

Hitung jumlah Riemann dari f atas persegi panjang R dengan 8 persegi panjang bagian yang luasnya sama dan titik sampel berupa titik tengah persegi panjang bagian



4

Misal $\|P\|$ menunjukkan luas persegi panjang bagian yang ~~terkecil~~ terbesar

Definisi :

Misal f fungsi dua peubah yang terdefinisi pada

persegipanjang R

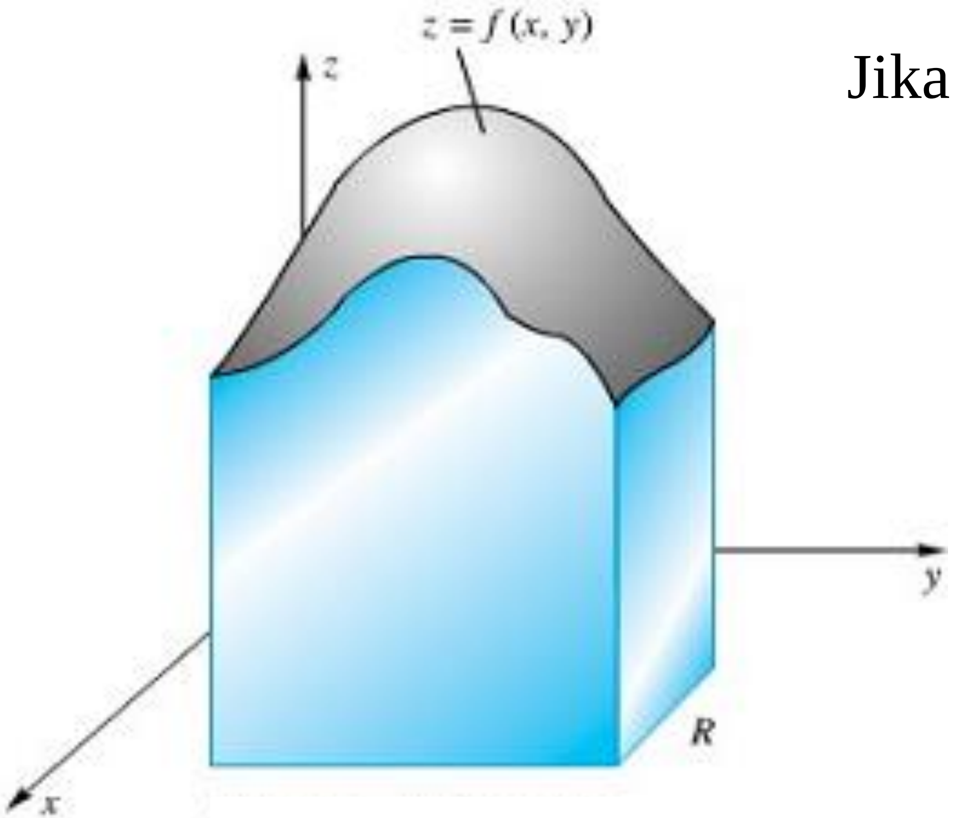
Jika $\lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$ ada , kita katakan f dapat

diintegralkan pada R

Lebih lanjut $\iint_R f(x,y)\,dA$ disebut integral rangkap f

pada R diberikan oleh $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$

Tafsiran geometris integral Riemann :

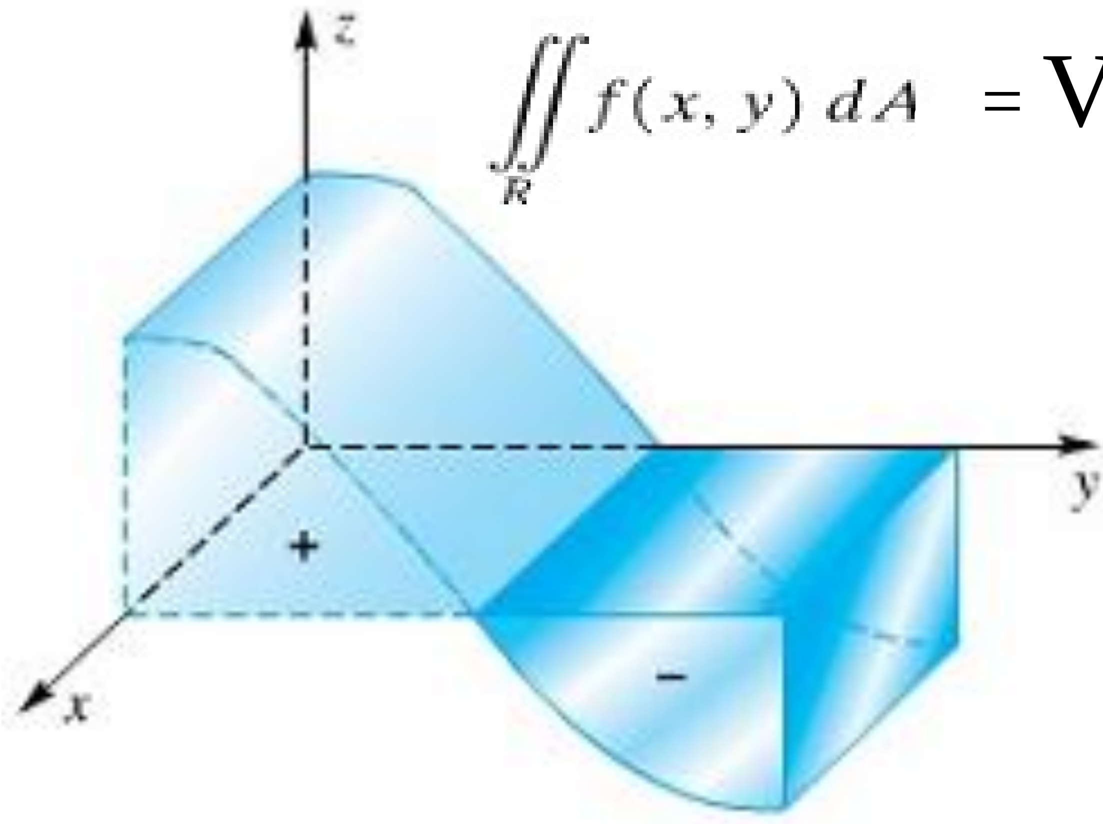


Jika : $f(x, y) \geq 0$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\,\Delta A_k$$

= volume benda pejal dibawah permukaan $z = f(x, y)$

Jika $f(x, y)$ negatif pada bagian dari persegi panjang R pada bidang- *xy*, integral dari daerah yang dibatasi permukaan dan R adalah jumlah bertanda dari volume



$$\iint_R f(x, y)\, dA = V_{atas} - V_{bawah}$$

Volume =

$$\iint_R |f(x, y)|\, dA$$

Teorema

Jika f terintegralkan pada suatu persegi panjang R maka f terbatas di R

Teorema

Misal f terbatas pada suatu persegi panjang tertutup R, maka

- jika f kontinu kecuali di berhingga titik maka terintegralkan pada R
- jika f kontinu pada seluruh R maka f terintegralkan di R

Berikan pendapatmu tentang keterintegralan fungsi berikut :

$$f(x,y) = e^{\sin(xy)} - y^3\cos(x^2y)$$

$$g(x,y) = \frac{x^2y - 2x}{y - x^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1 \\ 2, & \text{if } 0 \le x \le 3, 1 < y \le 2 \\ 3, & \text{if } 0 \le x \le 3, 2 < y \le 3 \end{cases}$$

Sifat-sifat

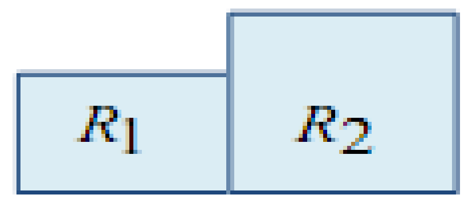
1. Integral rangkap adalah linier

   (a) $\iint\limits_R kf(x,y)\,dA = k\iint\limits_R f(x,y)\,dA$

   (b) $\iint\limits_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA + \iint\limits_R g(x,y)\,dA$

2. Integral rangkap adalah aditif pada persegipanjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis

   $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$



3. Berlaku sifat pembandingan

   Jika $f(x,y) \le g(x,y)$ untuk setiap (x,y) di R, maka

   $\iint\limits_R f(x,y)\,dA \le \iint\limits_R g(x,y)\,dA$

Misal $R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Jika f terintegralkan di R bagaimana menghitung

$\iint_R f(x, y)\, dA,$?????

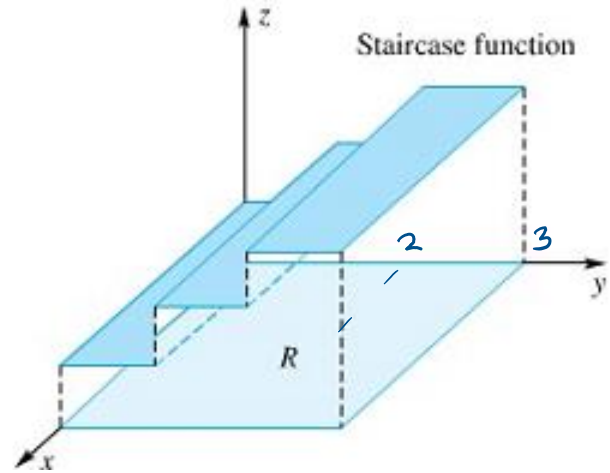
Jika $f(x, y) = 1$, integral rangkap bisa dilihat sebagai luas persegi panjang, sehingga

$$\iint_R k\, dA = k \iint_R 1\, dA = kA(R)$$

Soal :

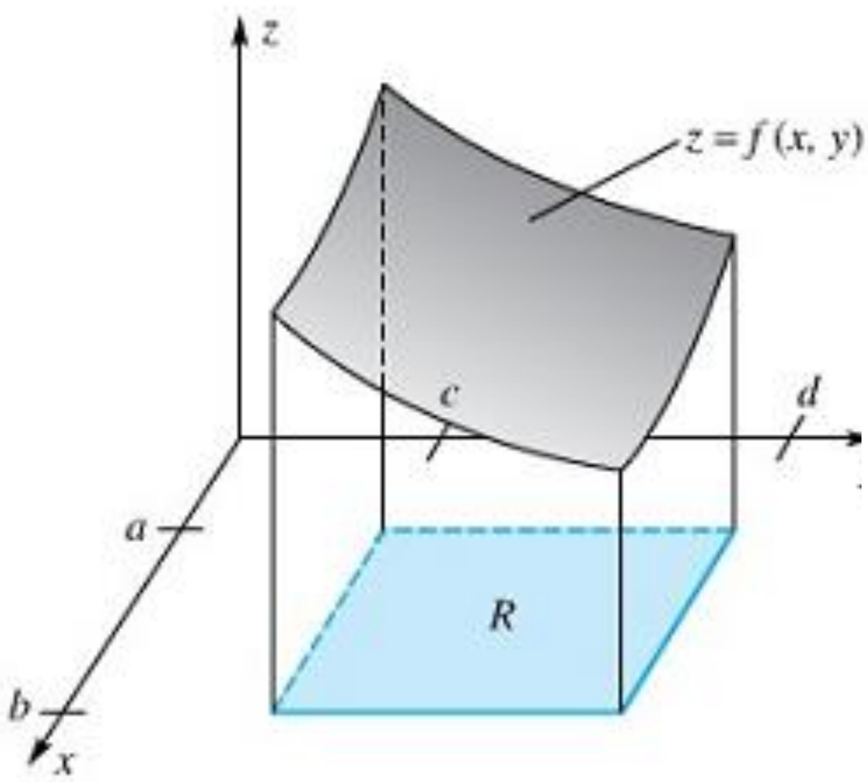
Misal

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1 \\ 2, & \text{if } 0 \le x \le 3, 1 < y \le 2 \\ 3, & \text{if } 0 \le x \le 3, 2 < y \le 3 \end{cases}$$



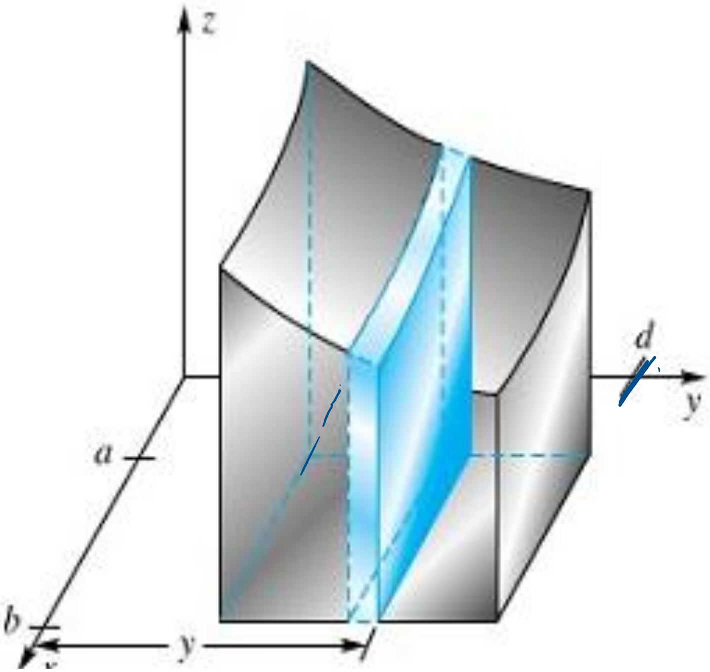
Hitung

$$\iint_R f(x, y)\, dA, \text{ where } R = \{(x, y): 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3\}.$$



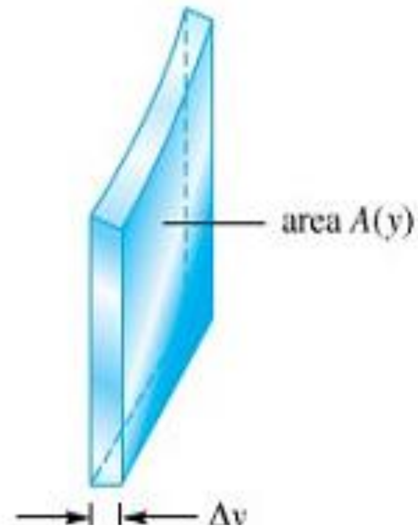
Jika $f(x, y) \geq 0$, maka

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$



Irisan oleh bidang $y =$ konstanta

(a)



Volume kepingan : $\Delta V \approx A(y)\Delta y$

(b)

Volume benda pejal di bawah permukaan : $V = \int_c^d A(y)dy$

Pandang $A(y)$ sebagai luas daerah dibawah kurva $f(x,y)$ dengan y konstan, maka $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$

Volume benda pejal di bawah permukaan : $V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$

Integral lipat (integral berulang) pada

$$R = \{(x, y) | a \le x \le b, c \le y \le d \}$$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx \right] dy$$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

Soal :

Hitung

$$\int_1^2 \int_0^3 (xy + y^2)\, dx\, dy$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 x \sin y\, dx\, dy$$

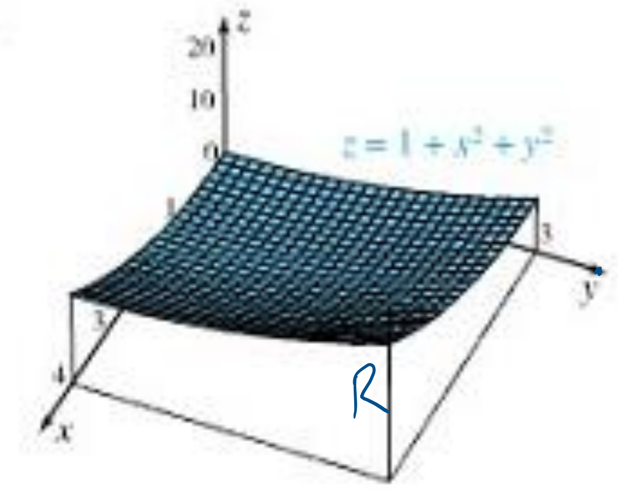
$$\iint_R \sin(x + y)\, dA;$$

$$R = \{(x, y): 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2\}$$

Soal :

Hitung volume benda pejal yang :

berada dibawah permukaan yang gambarnya dil
seperti berikut :



Soal :

Hitung volume benda pejal yang terletak pada oktan pertama yang ditutupi oleh permukaan $z = 4 - x^2$ dan $y = 2$