Matriks

Dr. Bregas S T Sembodo, S.T., M.T.

Program Studi Teknik Kimia

Fakultas Teknik Universitas Sebelas Maret 2021

Pengertian Matriks

Matriks adalah sekumpulan bilangan riil atau kompleks yang disusun menurut baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang. Matriks yang mempunyai m baris dan n kolom disebut m x n atau matriks berordo m x n.

Macam-Macam Matriks

1. **Matriks Nol** adalah suatu matriks yang semua elemen-elemennya adalah nol. Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Matriks Bujur Sangkar** adalah matriks m x n atau banyak baris = banyaknya kolom. Contoh :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Macam-Macam Matriks

3. **Matriks Diagonal** adalah matriks bujur sangkar yang semua elemennya sama dengan nol, kecuali elemen pada diagonal utamanya. Contoh :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Macam-Macam Matriks

4. **Matriks Satuan/Matriks Indentitas** adalah matriks diagonal yang semua elemen diagonal utamanya = 1. Contoh :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macam-Macam Matriks

5. **Matriks Skalar** adalah matriks yang elemen-elemen diagonalnya sama. Contoh :

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notasi Dua Indeks

Indeks pertama menyatakan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. Misalnya:

a11 = baris satu, kolom satu

a12 = baris satu, kolom dua

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

Operasi Dasar Matriks

- Penjumlahan matriks
- Pengurangan matriks
- Perkalian matriks
- Transpose matriks
- Determinan matriks
- Invers matriks

Penjumlahan Matriks

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b31 \\ b31 & b32 & b33 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b11 & a13+b13 \\ a21+b21 & a22+b22 & a23+b23 \\ a31+b31 & a32+b32 & a33+b33 \end{bmatrix}$$

Penjumlahan Matriks

Syarat = kedua matriks tersebut berukuran sama

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A + B$$

+ = 6

+ = 12

Pengurangan Matriks

$$\begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b31 \\ b31 & b32 & b33 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a11 - b11 & a12 - b11 & a13 - b13 \\ a21 - b21 & a22 - b22 & a23 - b23 \\ a31 - b31 & a32 - b32 & a33 - b33 \end{bmatrix}$$

Pengurangan Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A - B

$- \quad = \quad -1 \quad -2$

$- \quad = \quad 0 \quad 0$

Perkalian Matriks

$$K \times \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka11 & ka12 & ka13 \\ ka21 & ka22 & ka23 \\ ka31 & ka32 & ka33 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

x + x + x = 9

x + x + x = 16

x + x + x = 3

x + x + x = 13

x + x + x = 8

x + x + x = 14

$$A \times B = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks

Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan maksudnya baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris, maka matriks baru yang terbentuk disebut transpose dari matriks semula.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A^T = \begin{bmatrix} a11 & a21 & a31 \\ a12 & a22 & a32 \\ a13 & a23 & a33 \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks

$$A \longrightarrow A^T \longrightarrow (A^T)^T = A$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 6 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Determinan Matriks

Ada 3 metode yang bisa dipakai untuk menghitung determinan 3 x 3 yaitu:

1. Metode Sarruss
2. Metode kofaktor (atas)
3. Metode kofaktor (bawah)

Untuk determinan 2 x 2 cukup berlaku "**ad-bc**"

Determinan 2 x 2

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Det A = **ad-bc =** 2x5 – 4x7=10 - 28 = -18

Determinan 3 x 3

METODE SARRUSS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

- - - + + +

$$= \{(1.5.9) + (2.6.7) + (3.-4.-8)\} - \{(2.-4.9) + (1.6.-8) + (3.5.7)\}$$

$$= (45) + (84) + (96) + (105) - (-48) - (-72)$$

$$= 240$$

Determinan 3 x 3

METODE KOFAKTOR

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix} =$$

$$a1\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} - b1\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} + c1\begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

Determinan 3 x 3

CONTOH METODE KOFAKTOR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$1\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix} = 1[93] - 2[-78] + 3[-3]$$

$$= 93 + 156 - 9 = 240$$

Invers Matriks

Untuk matriks 2 x 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a\,x\,d \;-\; b\,x\,c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Invers Matriks

Untuk matriks 2 x 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4x7 - 9x3} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

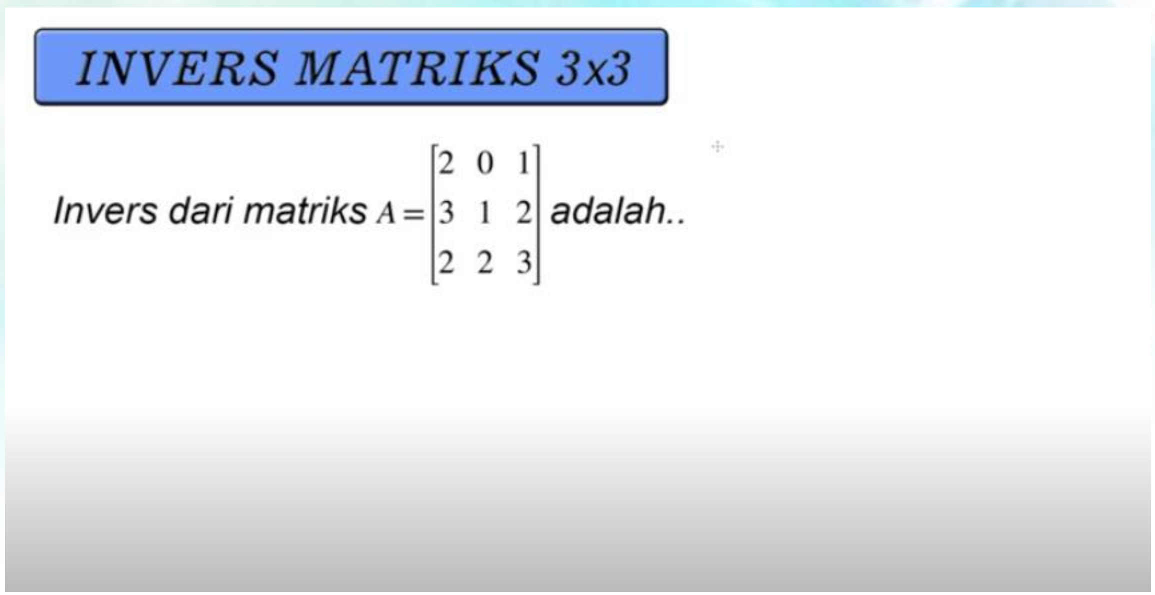
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Invers Matriks

Untuk matriks 3 x 3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \quad A} \cdot ajd\ (A)$$



https://www.youtube.com/watch?v=VwPr9YqVQx8

Perhatikan Video berikut:

Diketahui $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

Hitunglah :

$i\ PQ \quad (ii)\ P^{-1} \quad (v)\ (PQ)^{-1} \quad (vii)\ P^{-1}Q^{-1}$

$ii\ QP \quad (iv)\ Q^{-1} \quad (vi)\ (QP)^{-1} \quad (vii)\ Q^{-1}P^{-1}$

https://www.youtube.com/watch?v=h_QnDICqu0I

Kerjakan

Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Invers Matriks

Tentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$invers\ A = \frac{1}{\text{determinan } A} adjoin\ A$$

$$\det A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

$= +12 +36 +10 - 30 - 16 - 9$

$= 58 - 55$

$= 3$

Invers Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

adjoin A

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

$$adjoin\ A$$

$$\begin{bmatrix} 2\times3-(2\times4) & -(3\times3-(2\times5)) & 3\times4-(2\times5) \\ -(1\times3-(3\times4)) & 2\times3-(3\times5) & -(2\times4-(1\times5)) \\ 1\times2-(3\times2) & -(2\times2-(3\times3)) & 2\times2-(1\times3) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -(9-10) & 12-10 \\ -(3-12) & 6-15 & -(8-5) \\ 2-6 & -(4-9) & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 9 & -9 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$invers\ A = \frac{1}{\text{determinan } A} adjoin\ A \qquad determinan\ A = 3$$

$$adjoin\ A \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 9 & -9 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 9 & -9 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{9}{3} & -\frac{9}{3} & -\frac{3}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Persamaan Linier Simultan

Tika Paramitha, S.T., M.T.

Program Studi Teknik Kimia

Fakultas Teknik Universitas Sebelas Maret 2021

Persamaan Linier Simultan

- Persamaan linier simultan adalah suatu bentuk persamaan-persamaan yang secara bersama-sama menyajikan banyak variabel bebas
- Bentuk persamaan linier simultan dengan m persamaan dan n variabel bebas

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- a_{ij} untuk i=1 s/d m dan j=1 s/d n adalah koefisien atau persamaan simultan
- x_i untuk i=1 s/d n adalah variabel bebas pada persamaan simultan

Augmented Matrix

- Matrik yang merupakan perluasan matrik A dengan menambahkan vektor B pada kolom terakhirnya, dan dituliskan:
- **Augmented (A) = [A B]**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Jenis Persamaan Linier

Persamaan Linier Homogen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{2n}x_n &= 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Persamaan Linier Non Homogen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Aturan Cramer

Khusus untuk m=n SPL yg non homogin, penyelesaian tunggal bila Det (A) ≠ 0 dapat menggunakan :

1. Aturan Cramer

Pandang sistem n persamaan linear dalam n bilangan tak diketahui :

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_{1n} = b_1$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_{1n} = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_{11} + a_{n2}x_{12} + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_{nn} = b_n$$

Aturan Cramer

Determinan matriks koefisien adalah :

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mn} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Bila de(A_k) adalah determinan yang didapat dari det (A) dengan mengganti kolom ke k dengan suku tetap (b_1 b_2 ……b_n), maka aturan Cramer mengatakan :

$$x_k = \frac{\text{Det}(A_k)}{\text{Det}(A)}$$

k = 1,2,3,……,n

Aturan Cramer

Contoh : Selesaikan SPL berikut !

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 &= 20 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

Penyelesaian : determinan matriks koefisien

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 48 - 24 - 36 - 32 - 4 = -140$$

$$Det(A_1) = \begin{vmatrix} 20 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 40 - 176 + 12 - 132 + 16 - 40 = -280$$

Aturan Cramer

Sedangkan :

$$\mathrm{Det}(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 6 \\ 4 & -2 & -2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 120 + 264 + 36 - 80 + 44 = 140$$

$$\mathrm{Det}(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 20 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 48 - 80 - 120 - 352 - 4 = -560$$

$$x_1 = \frac{\mathrm{Det}(A_1)}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{-280}{-140} = 2 \qquad x_2 = \frac{\mathrm{Det}(A_2)}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{140}{-140} = -1$$

$$x_3 = \frac{\mathrm{Det}(A_3)}{\mathrm{Det}(A)} = \frac{-560}{-140} = 4$$

Invers Matriks

(2). Menggunakan invers matriks

Bila $Det(A) \neq 0$, maka A^{-1} ada

$AX = B$

$A^{-1}.AX = A^{-1}.B$

Jadi : $X = A^{-1}B$ penyelesaian sistem ini.

Catatan :

Bila m=n dan Det(A) = 0, maka sistemnya mempu-nyai tak berhingga banyak penyelesaian.

Contoh : selesaikan SPL berikut dengan mengguna kan invers matriks !

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8
\end{aligned}
$$

Invers Matriks

Penyelesaian : determinan matriks koefisien adalah :

$$\operatorname{Det}(\underset{\sim}{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8+18+1-4-6-6 = 11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.H = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/11 \\ 29/11 \\ 5/11 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{35}{11};\ x_2 = \frac{29}{11};\ x_3 = \frac{5}{11}$$

Metode Eliminasi Gauss

- Metode **Eliminasi Gauss** merupakan metode yang dikembangkan dari metode eliminasi, yaitu menghilangkan atau mengurangi jumlah variabel sehingga dapat diperoleh nilai dari suatu variabel bebas.
- Matrik diubah menjadi **augmented matrik** :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\mathrm{n}1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Metode Eliminasi Gauss

- Ubah matrik menjadi matrik segitiga atas atau segitiga bawah dengan menggunakan **OBE** (**Operasi Baris Elementer**).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} & d_n \end{bmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss

Metode dasar untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah mengganti sistem yang ada dengan sistem yang baru yang mempunyai himpunan solusi yang sama dan lebih mudah untuk diselesaikan.

Sistem yang baru diperoleh dengan serangkaian step yang menerapkan 3 tipe operasi. Operasi ini disebut Operasi Baris Elementer.

1.Menukar posisi dari 2 baris.

2.Mengalikan baris dengan sebuah bilangan skalar positif.

3.Menambahkan baris dengan hasil kali skalar dengan baris lainnya

Metode Eliminasi Gauss

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

$$\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[B_3 - B_1]{B_2 - 3B_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[5B_3 + B_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

Diperoleh: $11z = 11 \rightarrow z = 1$

$5y + 6z = 1$

$5y + 6 \cdot 1 = 1 \rightarrow y = -1$

$2x - z = 2$

$2x - 1 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

Jadi, solusinya:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan

- Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss, hanya saja augmented matrik, pada sebelah kiri diubah menjadi matrik diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{bmatrix}$$

- Penyelesaian dari persamaan linier simultan diatas adalah nilai $d_1, d_2, d_3, \dots, dn$ dan atau:

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, x_3 = d_3, \dots, x_n = d_n$$

Metode Eliminasi Gauss Jordan