Aplikasi Persamaan Diferensial Ordiner (PDO)

Dr. Bregas S T Sembodo, S.T., M.T.

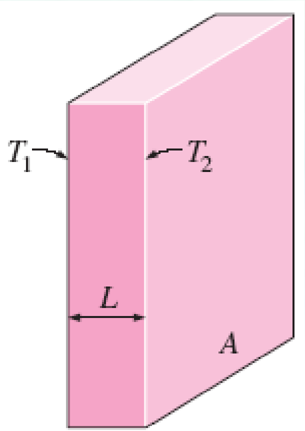
Program Studi Teknik Kimia

Fakultas Teknik Universitas Sebelas Maret 2021

PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

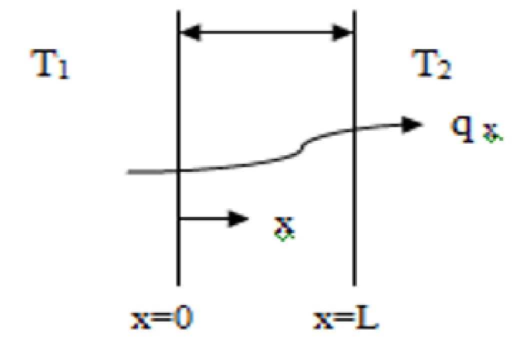
Contoh 1. Perpindahan panas konduksi *steady state* pada dinding datar.

Ditinjau: Permukaan bagian dalam dinding bersuhu T_1. Suhu di permukaan luar dinding dijaga T_2. Nilai T_1 lebih besar daripada T_2, sehingga terjadi perpindahan panas. Jika tebal dinding = L dan koefisien perpindahan panas dinding (konduktivitas bahan dinding) = k. Berapa panas yang ditransfer pada dinding itu?



Penyelesaian

T1 > T2, sehingga panas berpindah dari T1 ke T2.



Tahap 1 : Penentuan kondisi batas

x = 0 ; T = T1

x = L ; T = T2

Tahap 2 : Rumus perpindahan panas secara konduksi

Hukum Fourier

$$q = -k\,A\,\frac{dT}{dx}$$

q : panas yang ditransfer (Btu/jam)

k : konduktivitas media perpindahan panas (Btu/jam.°F.ft)

A : luas permukaan perpindahan panas (ft^2)

T : suhu (°F)

x : panjang media perpindahan panas (ft)

Tahap 3 : Masukkan luas perpindahan panas

A = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

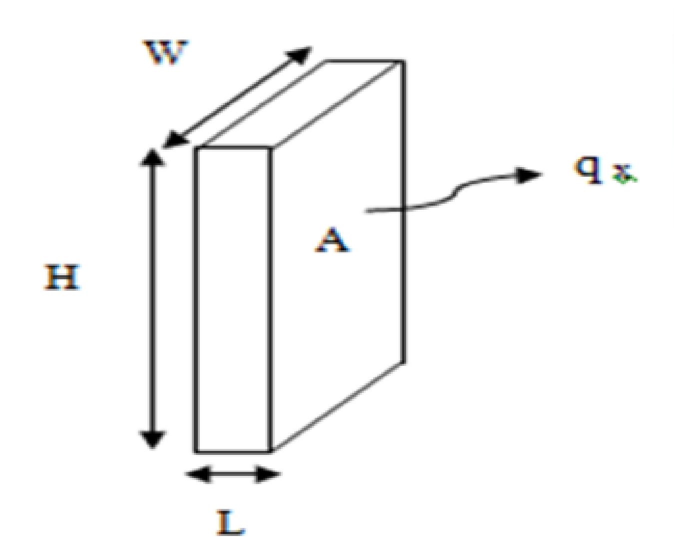
Luas permukaan perpindahan panas = luas persegi panjang.

Luas ini fungsi dari panjang perpindahan panas atau A = f(x).

$$A = W\,H$$

$$q = -k\,A\,\frac{dT}{dx}$$

$$q = -k\,W\,H\,\frac{dT}{dx}$$



Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k\,W\,H\,\frac{dT}{dx}$$

$$q\,dx = -k\ W\,H\,dT$$

masukkan kondisi batas.

$$q\int_{x=0}^{x=L} dx = -\,k\ W\ H\int_{T_1}^{T_2} dT$$

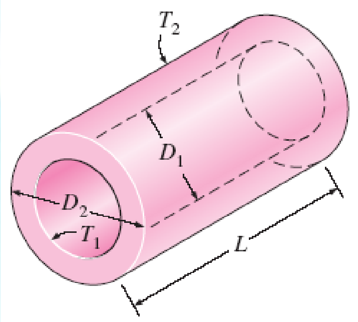
$$q\,(x)\Big|_{0}^{L} = -k\,W\ H(T)\Big|_{T1}^{T2}$$

$$q\ \ (L-0) = -k\,W\ H\ (T2-T1)$$

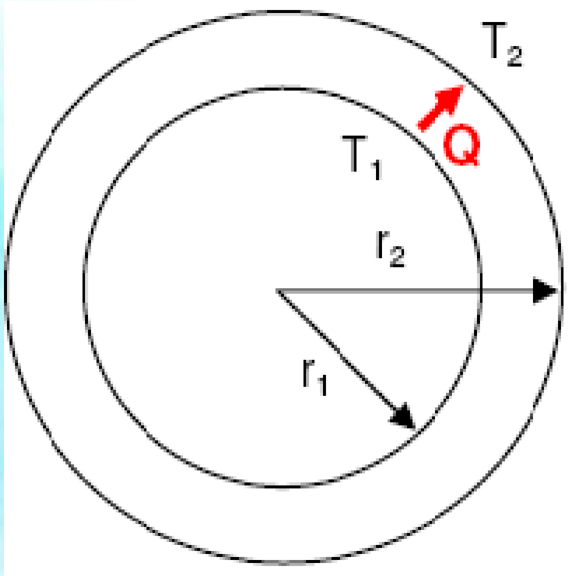
$$q\ \ = -\frac{k\,W\ H}{L}\ (T2-T1)$$

$$q\ \ = \frac{k\,W\ H}{L}\ (T1-T2)$$

Contoh 2. Di banyak proses industri, panas ditransfer melalui dinding pipa dengan ketebalan tertentu (r_2 - r_1) dan panjang pipa L (pipa ~ silinder). Suhu di permukaan dalam pipa adalah T_1. Suhu di permukaan luar pipa adalah T_2. Konduktivitas pipa adalah k. Berapa panas yang ditransfer?



Penyelesaian



T1 > T2, sehingga panas berpindah dari T1 ke T2.

Tahap 1 : Penentuan kondisi batas

r = r1 ; T = T1

r = r2 ; T = T2

Tahap 2 : Rumus perpindahan panas secara konduksi

<u>Hukum Fourier</u>

$$q = -k\,A\,\frac{dT}{dr}$$

Tahap 3 : Masukkan luas perpindahan panas

A = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

Luas permukaan perpindahan panas = luas selimut silinder.

Luas ini fungsi dari jari-jari atau A = f(r).

Artinya jika r berubah, maka luas permukaan juga berubah :

$$A = 2\,\pi\,r\,L$$

$$q = -k\,2\,\pi\,r\,L\,\frac{dT}{dr}$$

Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k\,2\,\pi\,r\,L\,\frac{dT}{dr}$$

$$q\,\frac{1}{r}\,dr = -k\,2\,\pi\,L\,dT$$

masukkan kondisi batas.

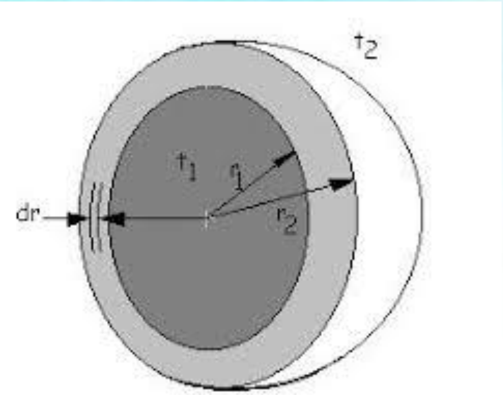
$$\int_{r=r_1}^{r=r_2} q \cdot \frac{1}{r}\,dr = \int_{T=T_1}^{T=T_2} -2\,\pi\,L\,k\,dT$$

$$q\,(\ln r_2 - \ln r_1) = -2\pi\,L\,k\,(T_2 - T_1)$$

$$q = k\,\frac{2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}\,(T_1 - T_2)$$

PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

Contoh 3. Suatu tangki bola seperti skema di bawah. Bagaimana kecepatan perpindahan panas di dinding tangki?



Penyelesaian

T1 > T2, sehingga panas berpindah dari T1 ke T2.

Tahap 1 : Penentuan kondisi batas

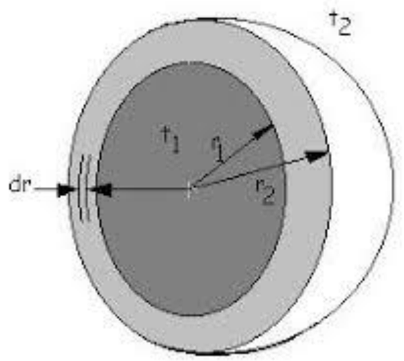
r = r1 ; T = T1

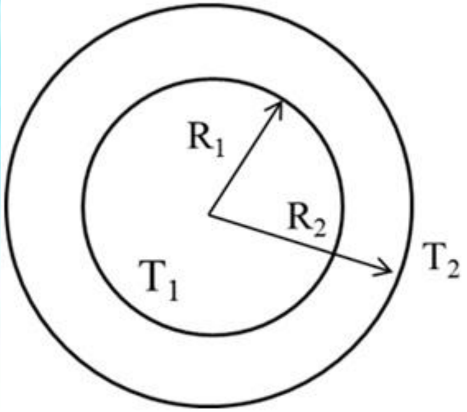
r = r2 ; T = T2

Tahap 2 : Rumus perpindahan panas secara konduksi

<u>Hukum Fourier</u>

$$q = -k\,A\,\frac{dT}{dr}$$





Tahap 3 : Masukkan luas perpindahan panas

A = luas perpindahan panas yang tegak lurus dengan arah perpindahan panas.

Luas permukaan perpindahan panas = luas permukaan bola.

Luas ini fungsi dari jari-jari atau A = f(r).

Artinya jika r berubah, maka luas permukaan juga berubah :

$$A = 4 \pi r^2$$

$$q = -k A \frac{dT}{dr}$$

$$q = -k 4 \pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

Tahap 4 : Penyelesaian dengan PDO

$$q = -k\, 4\, \pi\, r^2\ \frac{dT}{dr}$$

$$q\ \frac{dr}{r^2} = -k\, 4\, \pi\, dT$$

masukkan kondisi batas.

$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\, 4\, k\, \pi \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$q \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{1}{r}\right) = -\, 4\, k\, \pi \int_{T_1}^{T_2} (T)$$

$$q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\, 4\, k\, \pi\, (T_2 - T_1)$$

$$q = \frac{4k\pi(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

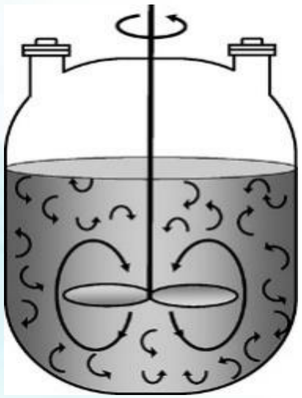
Bidang	q
Datar (plane)	$q = \frac{k\,W\,H}{L}(T_1 - T_2)$
Silinder	$q = k\,\frac{2\pi L}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\,(T_1 - T_2)$
Bola	$q = \frac{4k\pi(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$

PDO ORDER 1 DISELESAIKAN DENGAN *SEPARATION OF VARIABLE*

Contoh 4. Reaksi dijalankan dalam reaktor batch dengan volume tetap.

Reaksi : A → B

Mula-mula (saat t=0), reaktor hanya berisi A dengan konsentrasi Cao (mol A/L). Bahan A (reaktan) berkurang karena bereaksi membentuk B. Kecepatan reaksi (pengurangan) A:



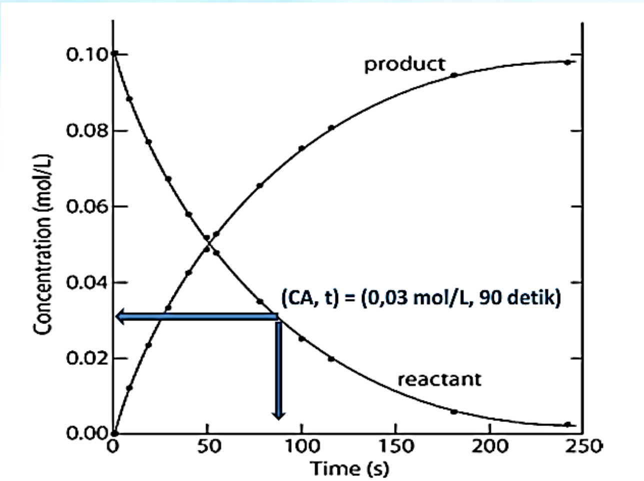
$$-r_A = k\ C_A$$

Satuan r_A adalah mol A yang bereaksi per satuan volum per satuan waktu.

Ingin dicari hubungan:

a. konsentrasi A sebagai fungsi waktu reaksi (t).

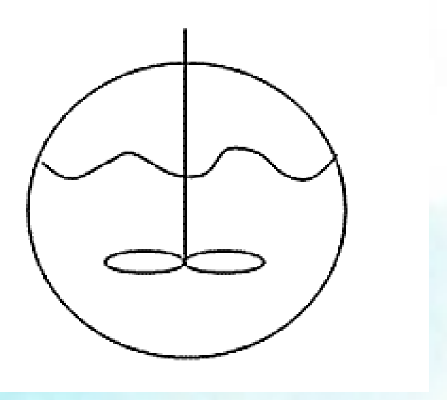
b. konversi A sebagai fungsi waktu reaksi (t).



Penyelesaian

Tahap 1 : Skema proses :

$$A \rightarrow B$$



Kecepatan pengurangan A :

$$-r_A = k\,C_A$$

<u>Kondisi batas :</u>

$t = 0$; $C_A = C_{Ao}$

$t = t$; $C_A = C_A$

Dicari $C_A = f(t)$ dan $X_A = f(t)$?

Tahap 2 : Penyusunan PD atau hubungan konsentrasi A terhadap waktu reaksi dalam reaktor *batch*.

<u>Neraca massa A di dalam reaktor</u>

(mol A masuk ke reaktor) – (mol A keluar dari reaktor)- (mol A yang bereaksi) = (mol A yang terakumulasi dalam reaktor)

$$0 - 0 - (-r_A)\, V = \frac{d}{dt}\,(C_A\ V)$$

Volum tetap, sehingga:

$$\frac{dC_A}{dt} = -\,k\,C_A$$

Tahap 3 : Penyelesaian persamaan diferensial

$$\frac{dC_A}{dt} = -\,k\,C_A$$

$$\frac{dC_A}{C_A} = -\,k\,dt$$

$$\ln C_A = -\,k\,t + c$$

Nilai c dievaluasi menggunakan kondisi batas. Substitusi pada t=0 nilai C_A=C_{AO}.

$$\ln C_{A0} = -k\,.0 + c$$

$$c = \ln C_{A0}$$

Maka hubungan C_A dengan waktu reaksi :

$$\ln C_A = \ln C_{A0} - kt$$

Tahap 4 : Penyusunan hubungan konversi A terhadap waktu reaksi

Hubungan konsentrasi C_A dan konversi:

$$x_A = \frac{A_{bereaksi}}{A_{mula-mula}} = \frac{C_{Ao} - C_A}{C_{Ao}}$$

$$x_A \cdot C_{Ao} = C_{Ao} - C_A$$

$$C_A = C_{Ao} - C_{Ao} \cdot x_A$$

$$C_A = C_{Ao}(1 - x_A)$$

Dideferensialkan:

$$dC_A = d\left(C_{Ao}(1 - x_A)\right)$$

$$dC_A = C_{Ao}(-dx_A)$$

$$dC_A = -C_{Ao}\, dx_A$$

Substitusi ke persamaan kecepatan reaksi A:

$$\frac{dC_A}{dt} = -\,k\, C_A$$

$$C_{Ao}\frac{dx_A}{dt} = k\, C_{Ao}(1 - x_A)$$

Tahap 5 : Pemisahan variabel

$$C_{Ao}\frac{dx_A}{dt} = k\, C_{Ao}(1 - x_A)$$

$$\frac{dx_A}{(1 - x_A)} = k\, dt$$

Penyelesaian dengan pemisahan variabel.

Tahap 6 : Penyelesaian dengan integrasi

$$\int \frac{dx_A}{(1 - x_A)} = k \int dt$$

$$-\ln\ (1 - x_A) = k\,t + c2$$

Evaluasi c_2 dengan kondisi batas. Pada saat mula-mula (t=0), konsentrasi A = C_{Ao} dan x_A = 0. Evaluasi c_2:

$$-\ln(1 - 0) = k\,0 + c2$$

$$c2 = 0$$

Maka hubungan konversi A dengan waktu reaksi:

$$-\ln(1 - x_A) = kt$$

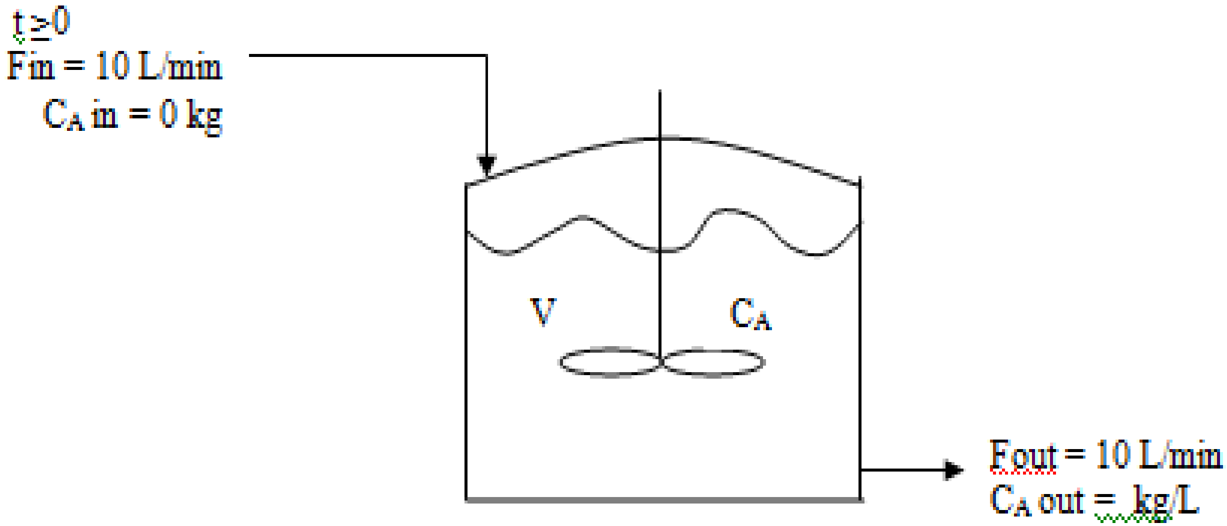
$$(1 - x_A) = \exp\,(-\,k\,t)$$

$$x_A = 1 - \ \exp\,(-\,k\,t)$$

Contoh 5. Suatu tangki berpengaduk kapasitas 1000 L dengan 15 kg A garam terlarut. Air murni masuk ke dalam tangki dengan laju 10 L/min. Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah ‘t’ menit? Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah 60 menit? Berapakah konsentrasi A dalam tangki setelah pengadukan yang sangat lama?

Penyelesaian

Tahap 1 : Skema proses :



Kondisi batas :

$t = 0; C_A = C_{Ao} \approx \frac{\text{gram A}}{\text{Volume larutan}} = \frac{15 \text{ kg A}}{1000 \text{ L}}$

Tangki berpengaduk, sehingga dapat diasumsikan konsentrasi garam dalam tangki seragam dan konsentrasi garam yang keluar tangki (C_{Aout}) sama dengan konsentrasi garam di dalam tangki (C_A).

Dicari $C_A = f(t)$?

Tahap 2 : Penyusunan hubungan C_A dengan t

Neraca massa garam A di dalam tangki :

$$(\text{kec. A masuk tangki}) - (\text{kec. A keluar tangki}) = (\text{Perubahan massa A dlm tangki})$$

$$C_{Ain} \cdot F_{in} - C_A \cdot F_{out} = \frac{d}{dt}(C_A \cdot V)$$

$$\frac{d}{dt}(C_A \cdot V) = 0 - C_A \cdot F_{out}$$

$V \neq f\ (t)$ volume larutan dalam tangki dijaga konstan.

$$V\frac{dC_A}{dt} = -C_A \cdot F_{out}$$

$$1000\frac{dC_A}{dt} = -C_A \cdot 10$$

$$\frac{dC_A}{C_A} = -\frac{1}{100}\ dt$$

Tahap 3 : Penyelesaian dengan integrasi

$$\frac{dC_A}{C_A} = -\frac{1}{100}\ dt$$

$$\ln C_A = -\frac{1}{100} t + c$$

Tahap 4 : Menentukan konstanta c

t = 0 ; C_A = Konsentrasi A dalam tangki pada t = 0

$$C_A = C_{A0} = \frac{15}{1000}\frac{Kg}{L}$$

Substitusi:

$$\ln C_{Ao} = -0 + c$$

$$c = \ln C_{Ao} = \ln\frac{15}{1000}$$

Maka hubungan C_A dengan (t) :

$$\ln C_A = -\frac{1}{100}t + \ln\frac{15}{1000}$$

$$\ln\left(\frac{C_A}{\frac{15}{1000}}\right) = -\frac{t}{100}$$

$$\frac{C_A}{\frac{15}{1000}} = \exp\left(-\frac{t}{100}\right)$$

$$C_A = C_{Ao}\exp\left(-\frac{t}{100}\right)$$

Tahap 5 : Hubungan CA dengan t tertentu

Setelah 1 jam = 60 menit :

$$C_A = C_{Ao} \exp\left(-\frac{60}{100}\right) = \cdots ???$$

Setelah waktu yang lama sekali= t = ~

$$C_A = C_{Ao} \exp\left(-\frac{\sim}{100}\right) = 0$$