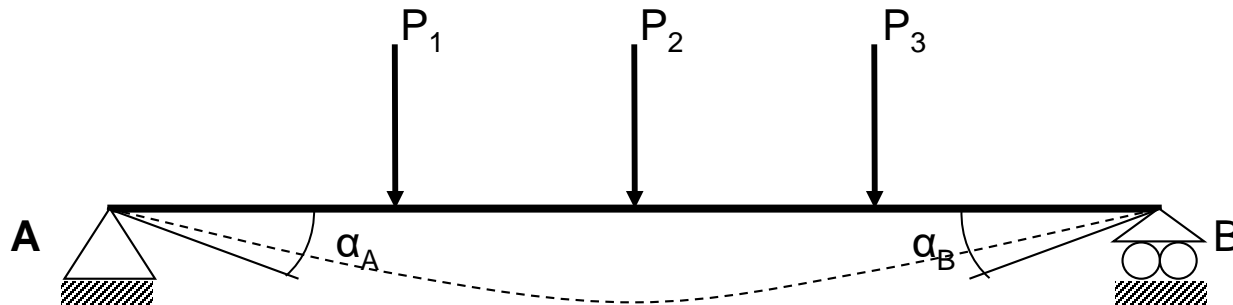


# Persamaan Tiga Momen (Clayperon)

Untuk analisis struktur balok menerus statis tak tentu

# 1. Penurunan Persamaan Tiga Momen

## a. Putaran sudut (akibat beban)

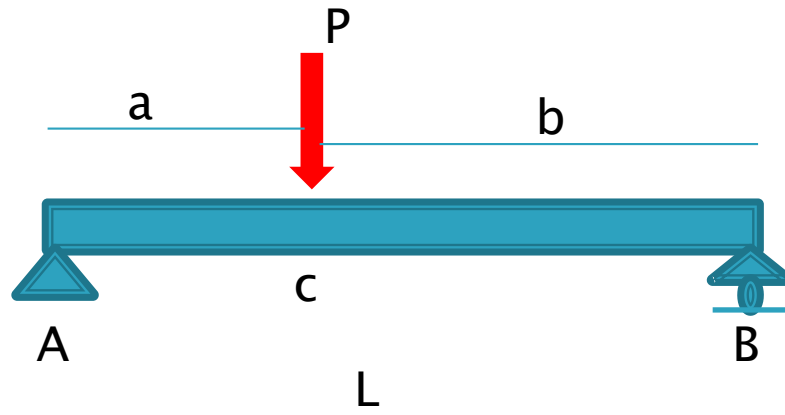


Struktur statis tertentu yang ditumpu sendi A dan rol B memiliki putaran sudut (sudut belahan) sebesar  $\alpha_A$  (ditumpuan A) dan  $\alpha_B$  (ditumpuan B) ketika balok tersebut menerima beban luar  $P_1$ ,  $P_2$  dan  $P_3$ . Bisakah anda menentukan besarnya  $\alpha_A$  dan  $\alpha_B$ ?

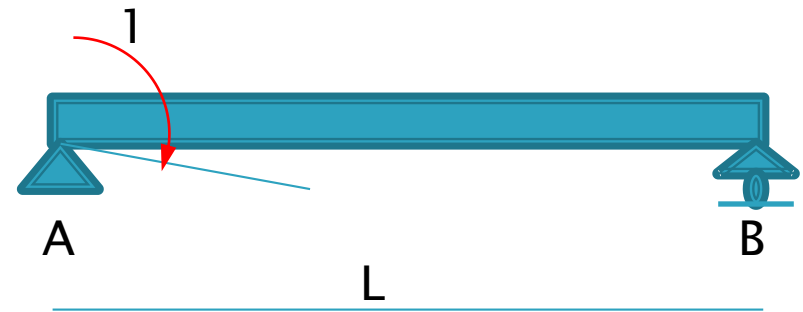
Pengaruh masing-masing gaya  $P$  terhadap putaran sudut dapat dihitung secara terpisah sehingga total putaran sudut yang terjadi akibat gaya  $P_1$ ,  $P_2$  dan  $P_3$  merupakan superposisi (gabungan) dari putaran sudut akibat masing-masing gaya  $P$ .

## Rotasi A

Batang	Batas2	Titik Awal	M	m
AC	$X=0 \rightarrow a$	A	$R_A \cdot X$	$r_A \cdot X$
CB	$X=0 \rightarrow b$	B	$R_B \cdot X$	$r_B \cdot X$



$$R_A = P \cdot b / L \quad R_B = P \cdot a / L$$



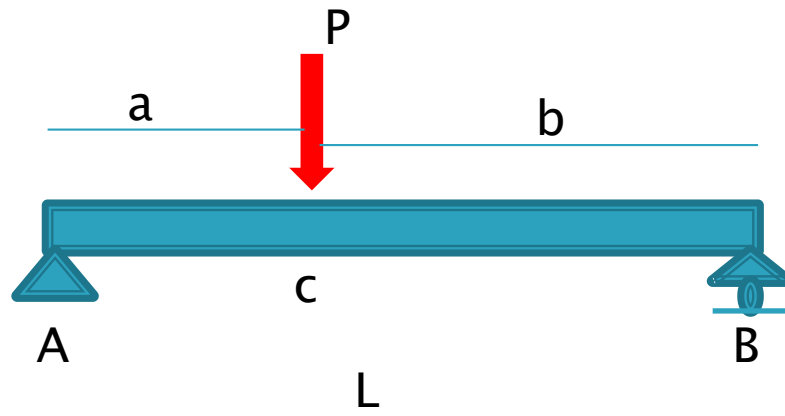
$$r_A = -1 / L \quad r_B = 1 / L$$

$$\alpha_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^a \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{(R_B x) \cdot (r_B x)}{EI} dx$$

$$\alpha_A = \frac{P \cdot b \cdot (L^2 - b^2)}{6 \cdot EI \cdot L}$$

## Rotasi B

Batang	Batas2	Titik Awal	M	m
AC	$X=0 \rightarrow a$	A	$R_A \cdot X$	$r_A \cdot X$
CB	$X=0 \rightarrow b$	B	$R_B \cdot X$	$r_B \cdot X$



$$R_A = P \cdot b / L \quad R_B = P \cdot a / L$$

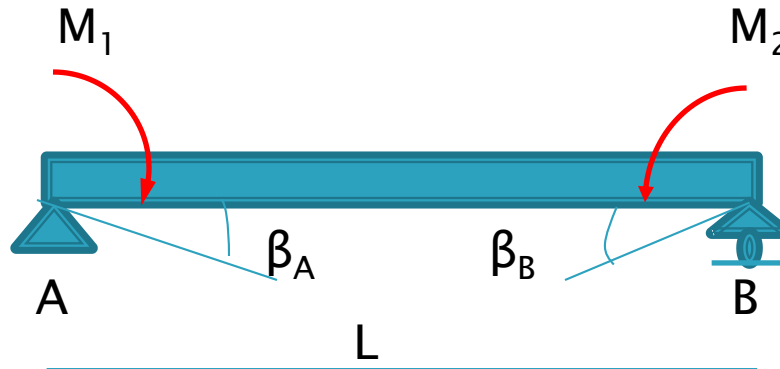


$$r_A = 1 / L \quad r_B = -1 / L$$

$$\alpha_B = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^a \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx + \int_0^b \frac{(R_B x) \cdot (r_B x)}{EI} dx$$

$$\alpha_B = \frac{P \cdot a \cdot (L^2 - a^2)}{6 \cdot EI \cdot L}$$

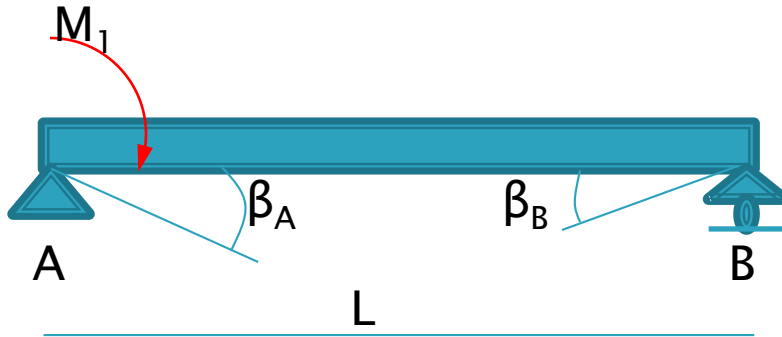
## b. Putaran sudut (akibat momen)



Berapa putaran sudut  $\beta_A$  dan  $\beta_B$  akibat momen  $M_1$  dan  $M_2$ ? Putaran sudut  $\beta$  yang terjadi dapat dihitung secara terpisah oleh masing-masing momen  $M$ ; sehingga total putaran sudut yang terjadi merupakan superposisi (gabungan) dari  $M_1$  dan  $M_2$ .

# Rotasi A & B

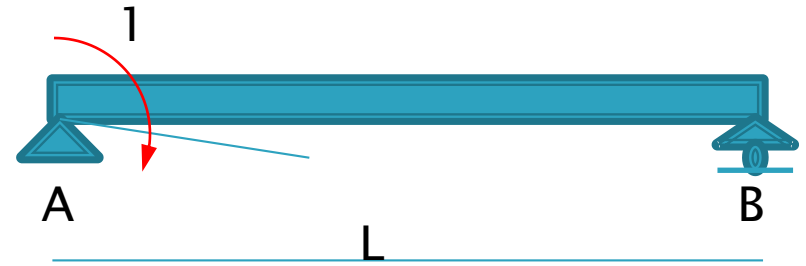
Batang	Batas2	Titik Awal	M	m
AB	$X=0 \rightarrow L$	A	$R_A \cdot X$	$r_A \cdot X$



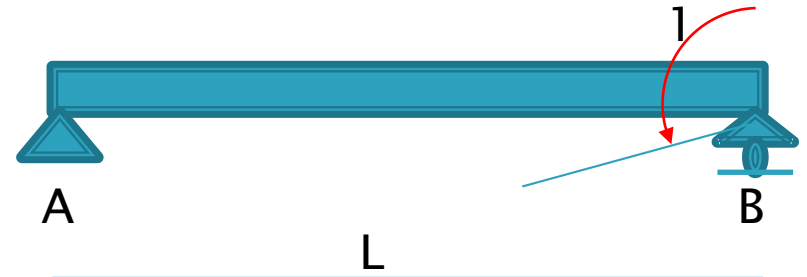
$$R_A = -M_1/L \quad R_B = M_1/L$$

$$\beta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx$$

$$\beta_A = \frac{M_1 \cdot L}{3EI}$$



$$r_A = -1/L \quad r_B = 1/L$$



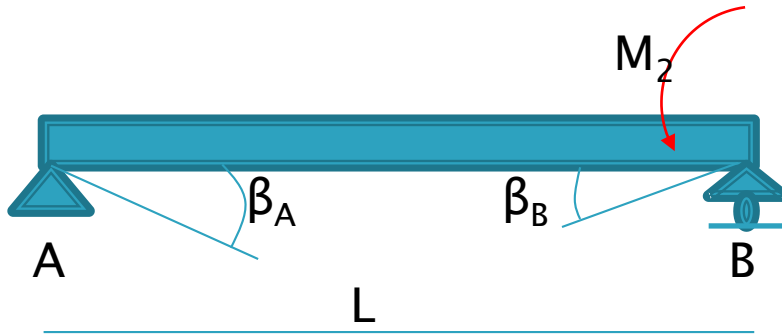
$$r_A = 1/L \quad r_B = -1/L$$

$$\beta_B = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx$$

$$\beta_B = \frac{M_1 \cdot L}{6EI}$$

# Rotasi A & B

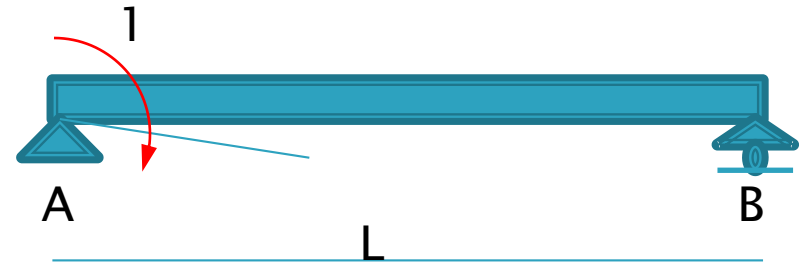
Batang	Batas2	Titik Awal	M	m
AB	$X=0 \rightarrow a$	A	$R_A \cdot X$	$r_A \cdot X$



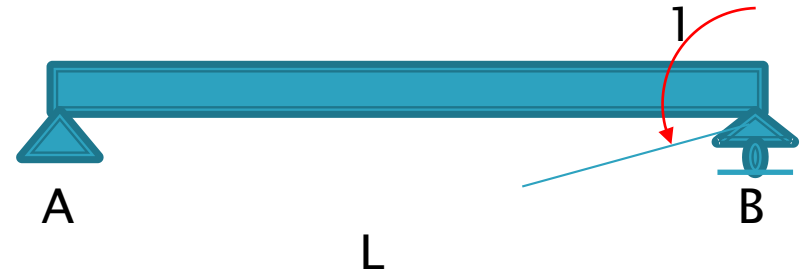
$$R_A = -M_1/L \quad R_B = M_1/L$$

$$\beta_A = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx$$

$$\beta_A = \frac{M_2 \cdot L}{6EI}$$



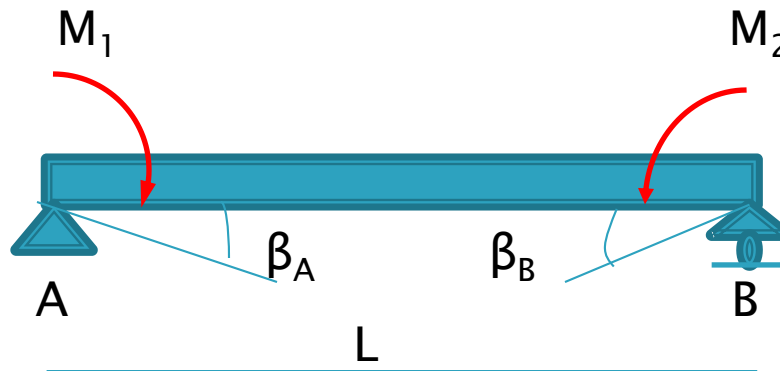
$$r_A = -1/L \quad r_B = 1/L$$



$$r_A = 1/L \quad r_B = -1/L$$

$$\beta_B = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^L \frac{(R_A x) \cdot (r_A x)}{EI} dx$$

$$\beta_B = \frac{M_2 \cdot L}{3EI}$$

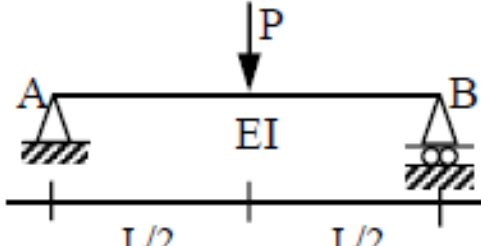
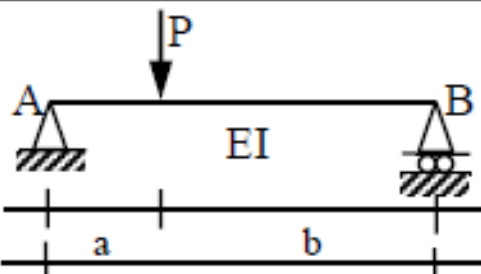
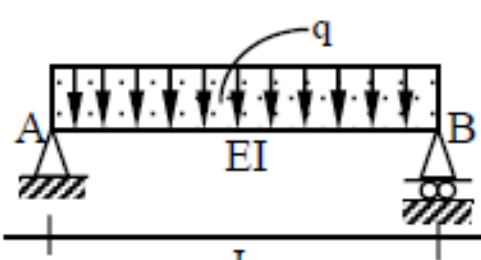


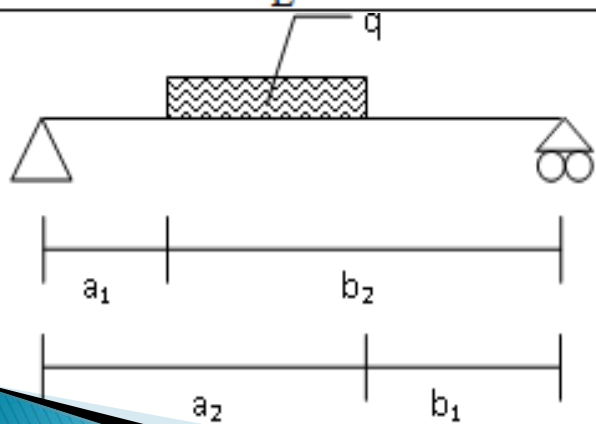
Sehingga total putaran sudut yang terjadi menjadi:

$$\beta_A = \frac{M_1 \cdot L}{3EI} + \frac{M_2 \cdot L}{6EI}$$

$$\beta_B = \frac{M_2 \cdot L}{3EI} + \frac{M_1 \cdot L}{6EI}$$

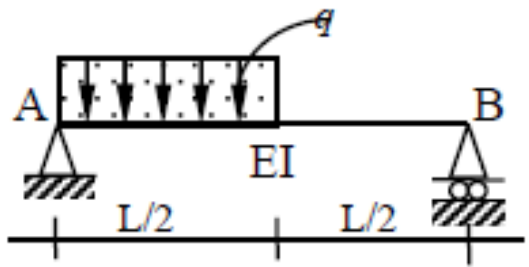


	$\phi_A = \frac{PL^3}{16EI}$	$\phi_B = -\frac{PL^3}{16EI}$
	$\phi_A = \frac{P \cdot b \cdot (L^2 - b^2)}{6EIL}$	$\phi_B = -\frac{P \cdot a \cdot (L^2 - a^2)}{6EIL}$
	$\phi_A = \frac{qL^3}{24EI}$	$\phi_B = -\frac{qL^3}{24EI}$



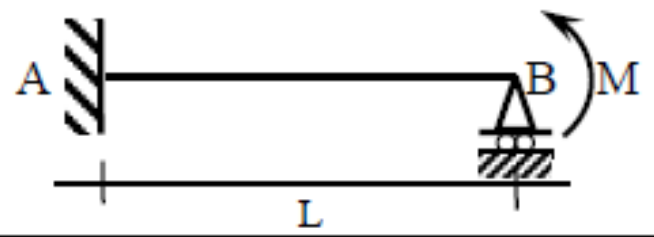
$$\alpha_A = \frac{q}{6 \cdot EI \cdot L} \left[ \frac{1}{2} L^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{b1}^{b2}$$

$$\alpha_B = \frac{q}{6 \cdot EI \cdot L} \left[ \frac{1}{2} L^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{a1}^{a2}$$



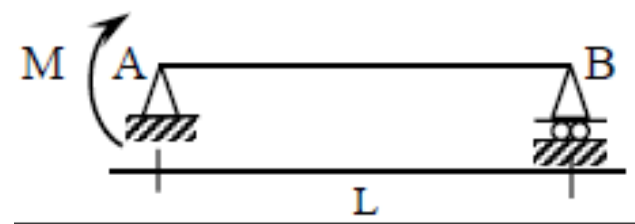
$$\phi_A = \frac{9qL^3}{384EI}$$

$$\phi_B = -\frac{7qL^3}{384EI}$$



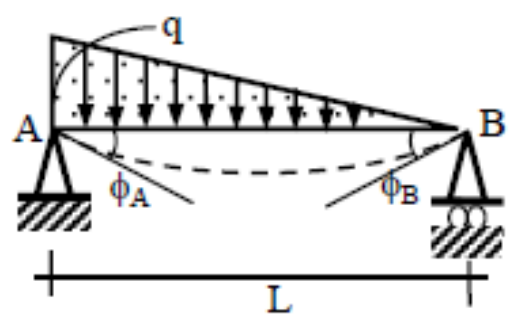
$$\phi_A = 0$$

$$\phi_B = -\frac{ML}{4EI}$$



$$\phi_A = \frac{ML}{3EI}$$

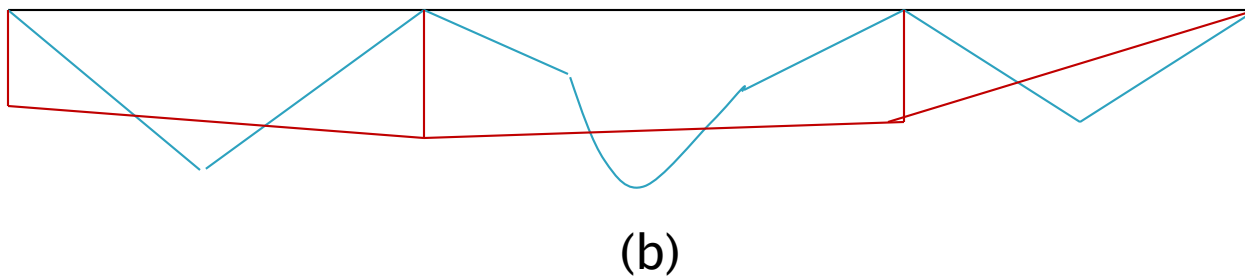
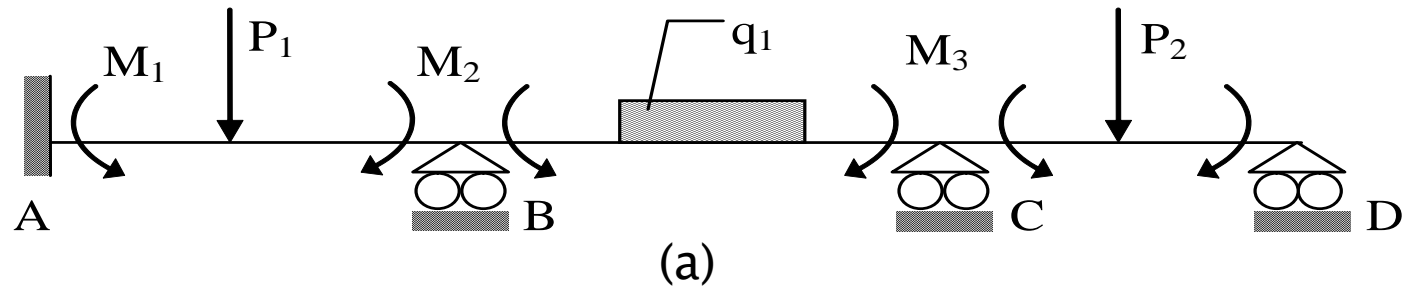
$$\phi_B = -\frac{ML}{6EI}$$



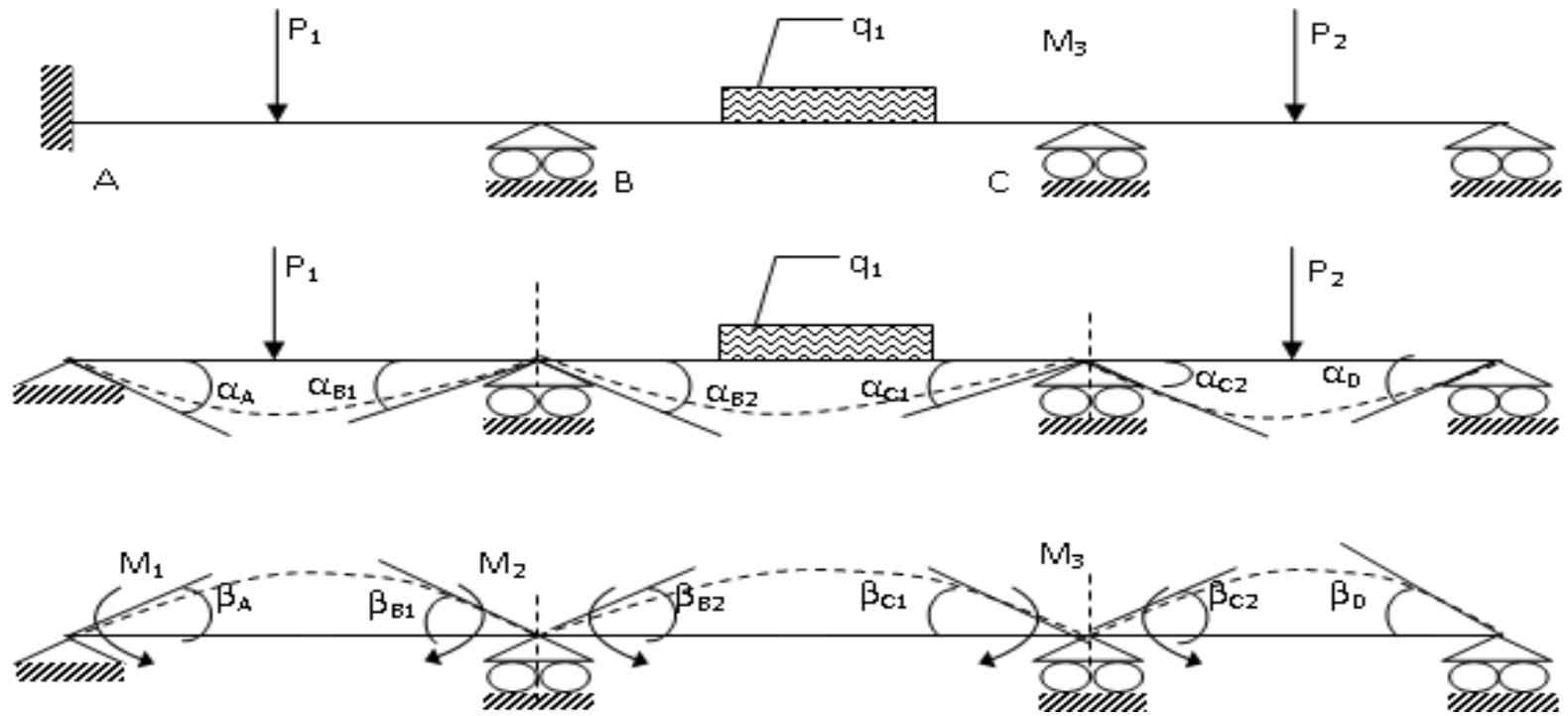
$$\phi_A = \frac{8}{360} \frac{qL^3}{EI}$$

$$\phi_B = -\frac{7}{360} \frac{qL^3}{EI}$$

## c. Putaran sudut pada balok menerus

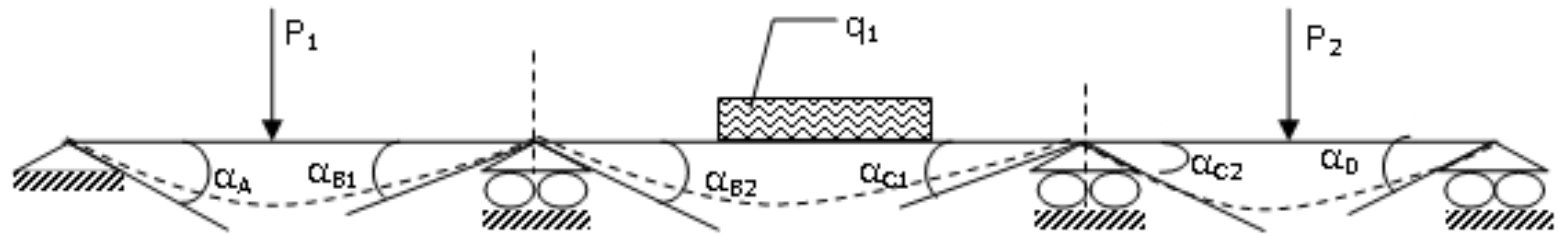


Bidang momen dari balok menerus tersebut dapat diilustrasikan pada Gambar (b). Ini berarti kita dapat memandang balok menerus tersebut merupakan **superposisi dari balok AB, BC dan CD yang merupakan balok statis tertentu** yang memikul beban masing-masing  $P_1$ ,  $q_1$  dan  $P_2$  dengan balok yang sama yang memikul momen  $M_1$  &  $M_2$ ,  $M_2$  &  $M_3$ , serta  $M_3$ .

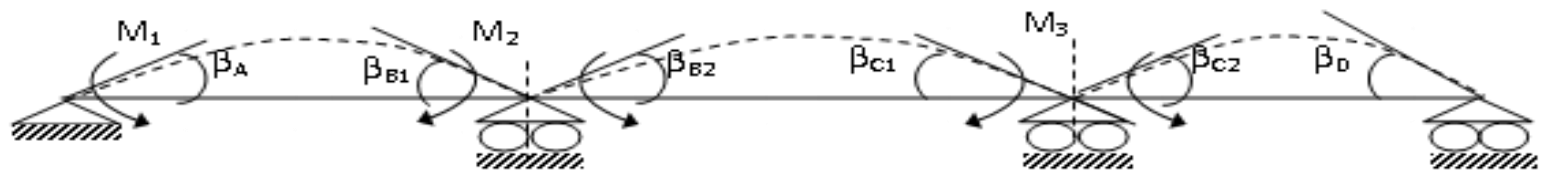


Superposisinya diperlihatkan pada gambar diatas. Masing-masing balok statis tertentu tersebut mengalami putaran sudut pada tumpuannya baik akibat beban luar  $P_1$ ,  $q_1$  atau  $P_2$  maupun akibat momen  $M_1$  &  $M_2$ ,  $M_2$  &  $M_3$  atau  $M_3$ . Mengingat pada tumpuan A, B dan C tersebut, balok harus tetap lurus (tidak ada belahan sudut), maka persamaan berikut harus berlaku:

$$\alpha_A = \beta_A \text{ (Pers.1); } \alpha_{B1} + \alpha_{B2} = \beta_{B1} + \beta_{B2} \text{ (Pers. 2); dan } \alpha_{C1} + \alpha_{C2} = \beta_{C1} + \beta_{C2} \text{ (Pers.3)}$$



Besarnya belahan sudut-sudut tersebut akibat beban luar dapat dicari!  
(lihat tabel sebelumnya)



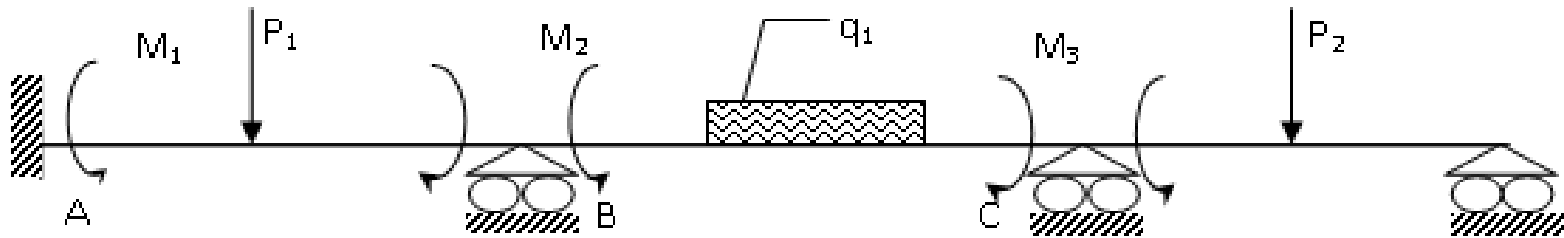
Besarnya belahan sudut-sudut tersebut akibat reaksi momen dapat dicari !

$$\beta_A = \frac{M_1 \cdot L_1}{3EI_1} + \frac{M_2 \cdot L_1}{6EI_1}$$

$$\beta_{B1} + \beta_{B2} = \frac{M_1 \cdot L_1}{6EI_1} + \frac{M_2 \cdot L_1}{3EI_1} + \frac{M_2 \cdot L_2}{3EI_2} + \frac{M_3 \cdot L_2}{6EI_2}$$

$$\beta_{C1} + \beta_{C2} = \frac{M_2 \cdot L_2}{6EI_2} + \frac{M_2 \cdot L_2}{3EI_2} + \frac{M_3 \cdot L_3}{3EI_3}$$

## e. Persamaan Tiga Momen

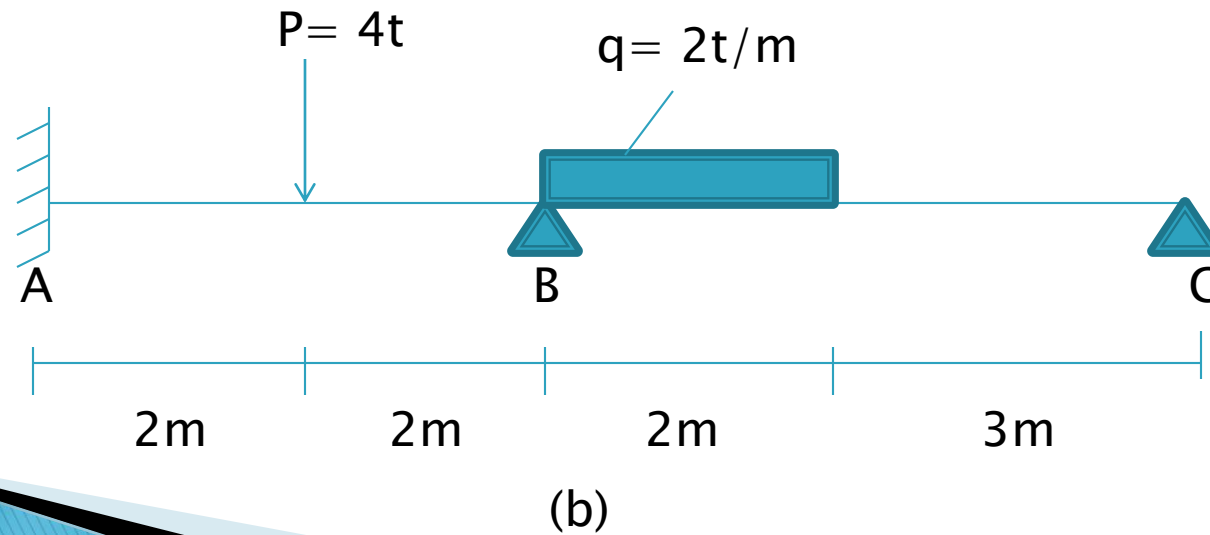
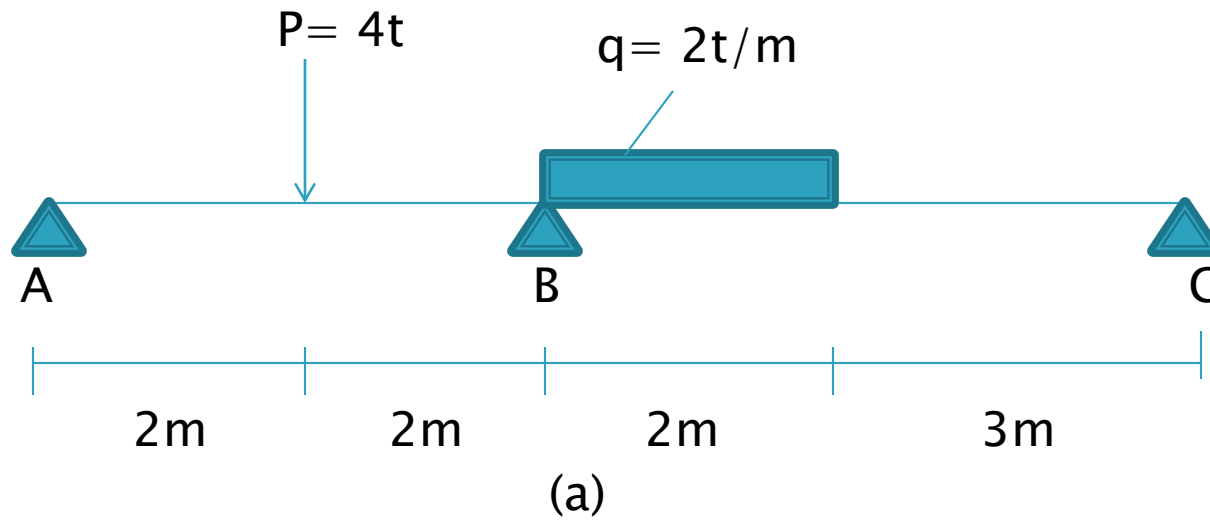


Pers. 1, Pers. 2 dan Pers. 3 merupakan persamaan tiga momen (Clayperon). Persamaan Clayperon ini dapat digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai  $M_1$ ,  $M_2$  dan  $M_3$  dengan cara mensubstitusikan nilai sudut-sudut belahan ke dalam Pers.1, Pers.2 dan Pers. 3.

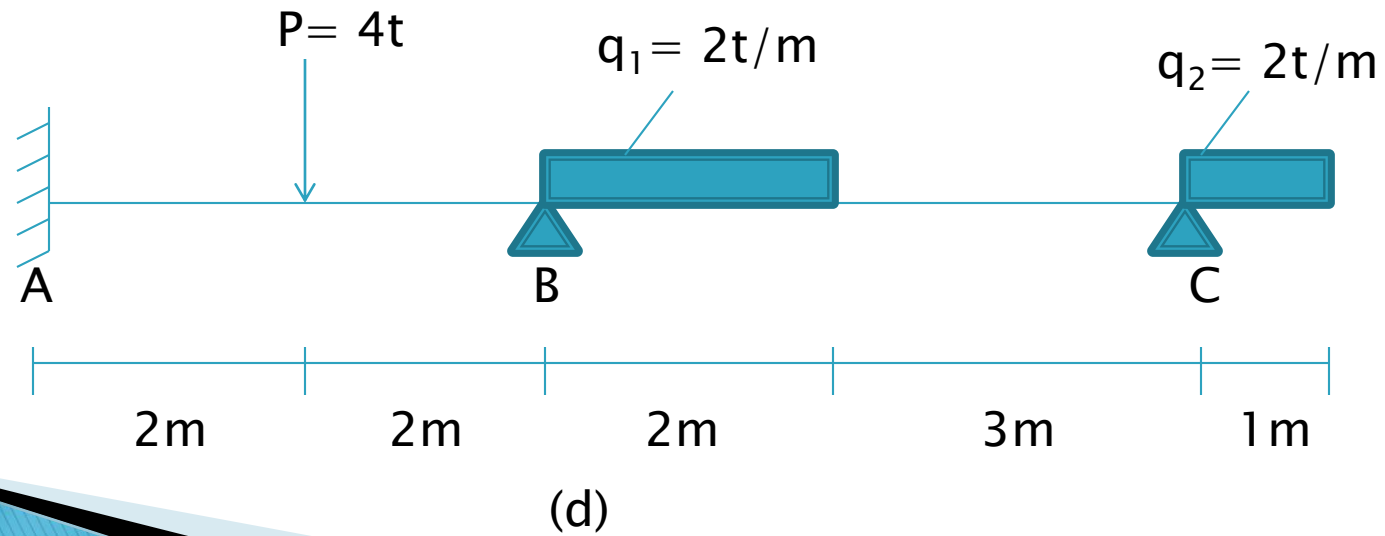
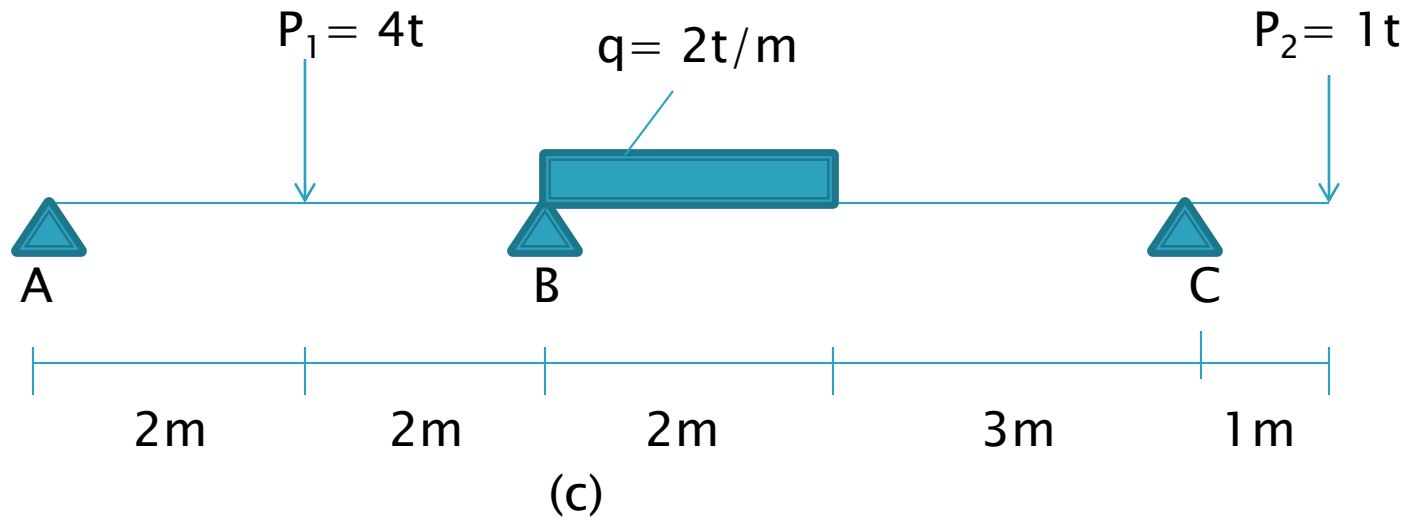
Dengan diketahuinya nilai-nilai  $M$ , maka reaksi-reaksi di tumpuan dapat diketahui dengan terlebih dahulu mencari reaksi dari *free body diagram* dengan persamaan kesetimbangan.

Dari reaksi *free body diagram*, maka reaksi total pada tumpuan dapat diketahui.

# Contoh Soal

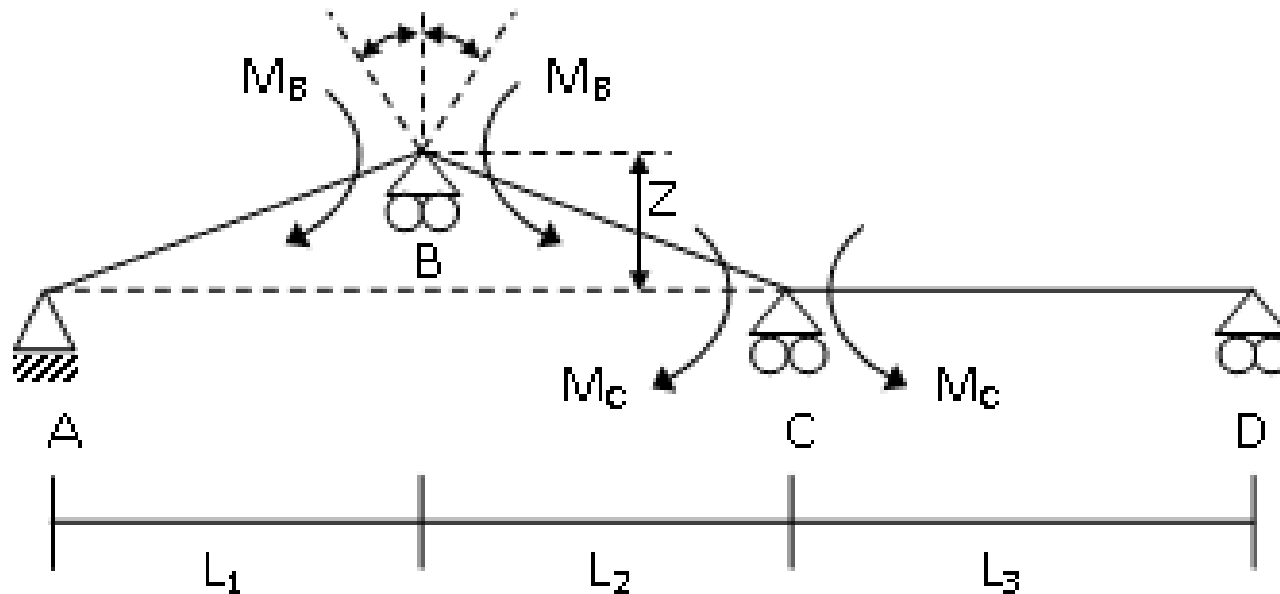


# Contoh Soal (lanjutan)





# Persamaan Tiga Momen pada kasus balok menerus dengan penurunan perletakan



ABCD konstruksi statis tak tentu, terjadi zetting (penurunan) ke atas sebesar  $Z$  pada tumpuan B. Akibatnya sudut di B bertambah besar sebesar  $(\gamma_1 + \gamma_2)$  sehingga di B terjadi **sudut belahan positif** sebesar :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{Z_B}{L_1} + \frac{Z_B}{L_2}$$

Sementara itu di tumpuan C sudutnya bertambah kecil sebesar  $\gamma_3 = -\frac{Z_B}{L_2}$

Momen yang timbul akibat pergeseran tumpuan di B dapat dicari dengan persamaan tiga momen sbb:

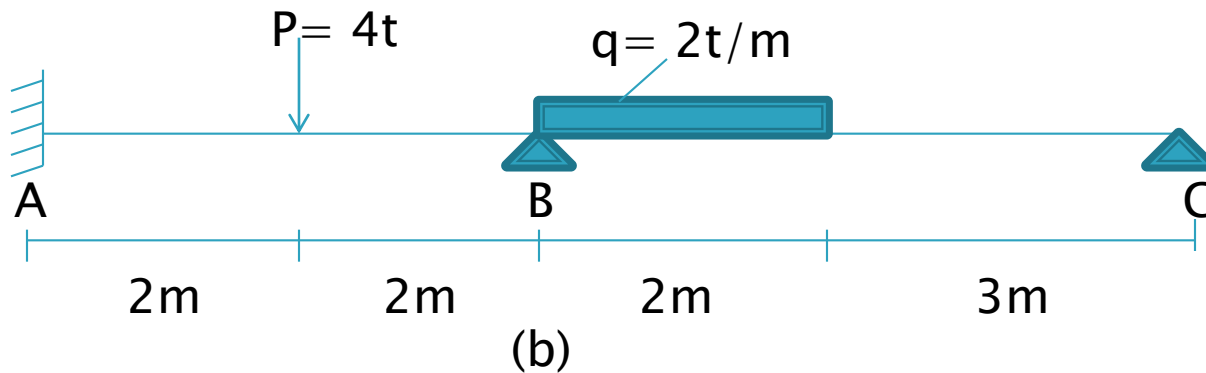
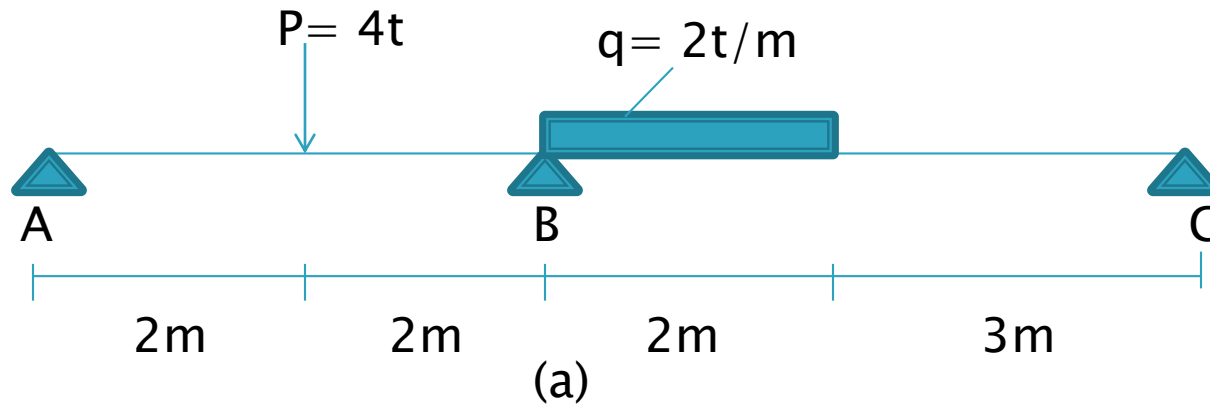
$$\alpha_{B1} + \alpha_{B2} = \beta_{B1} + \beta_{B2} \quad \text{di titik B}$$

$$\frac{Z_B}{L_1} + \frac{Z_B}{L_2} = \frac{M_B \cdot L_1}{3EI_1} + \frac{M_B \cdot L_2}{3EI_2} + \frac{M_C \cdot L_2}{6EI_2}$$

$$\alpha_{C1} + \alpha_{C2} = \beta_{C1} + \beta_{C2} \quad \text{dititik C}$$

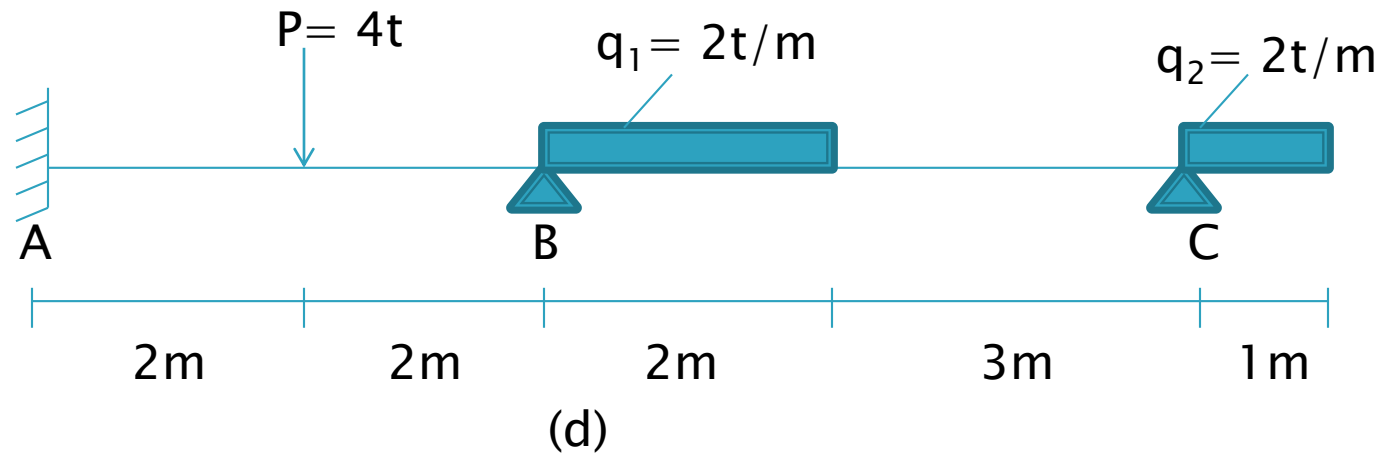
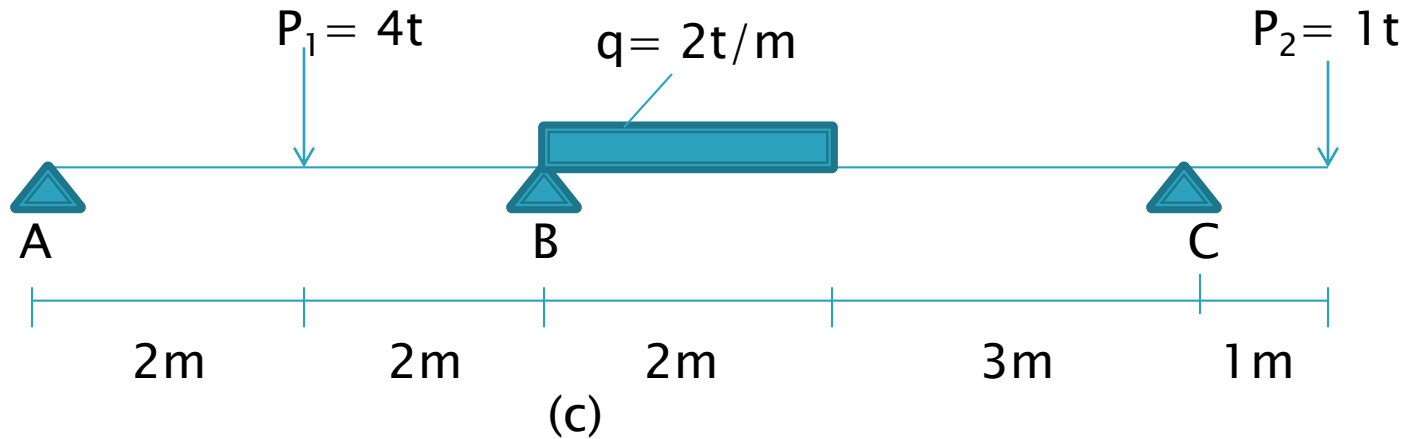
$$-\frac{Z_B}{L_2} + 0 = \frac{M_B L_2}{6EI_2} + \frac{M_C L_2}{3EI_2} + \frac{M_C L_3}{3EI_3}$$

# Contoh Soal



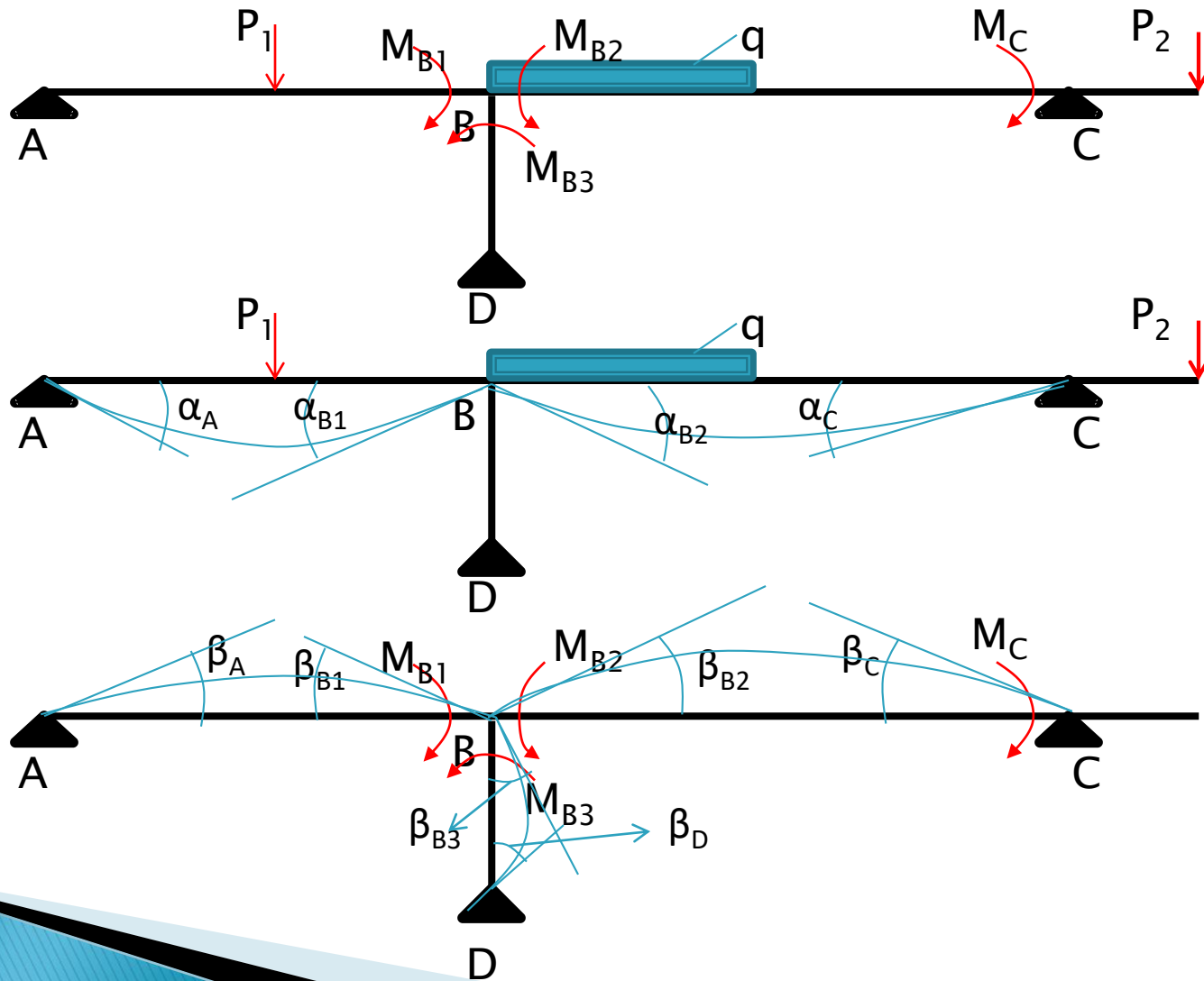
Gambar BMD dan SFD pada struktur balok menerus diatas apabila terjadi pergeseran tumpuan B ke bawah sebesar 2 cm.

# Contoh Soal (pergeseran tumpuan)



Gambar BMD dan SFD pada struktur balok menerus diatas apabila terjadi pergeseran tumpuan B ke bawah sebesar 2 cm.

# Persamaan Tiga Momen (balok menerus dengan dukungan pilar)



Pada joint B berlaku persamaan berikut:

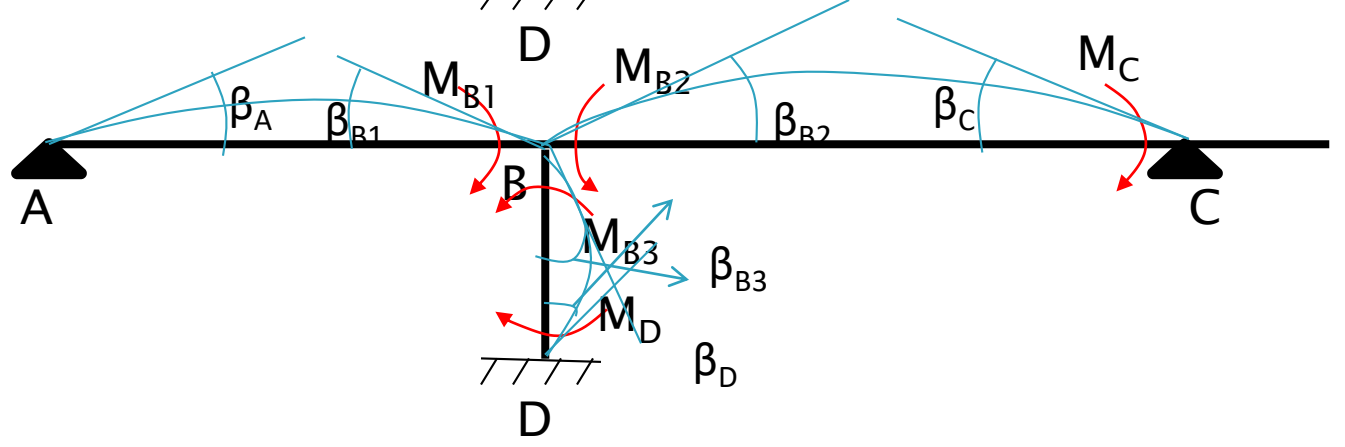
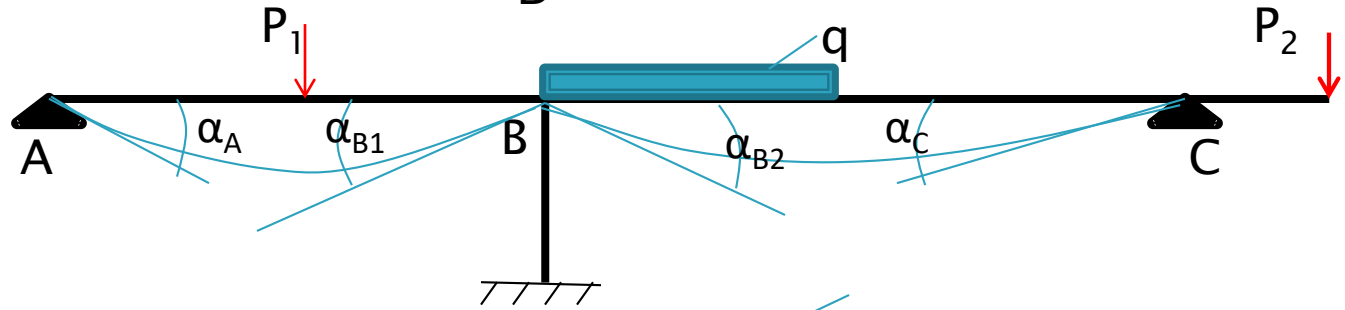
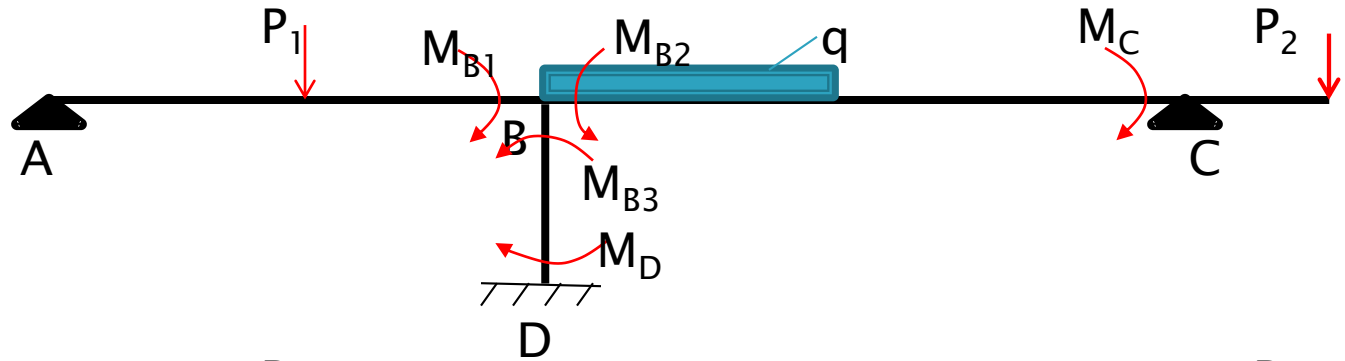
$$\alpha_{B1} = \beta_{B1} + \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B1} = \frac{M_{B1}L_1}{3EI} + \frac{M_{B3}L_3}{3EI} \quad (a)$$

$$\alpha_{B2} = \beta_{B2} - \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B2} = \frac{M_{B2}L_2}{3EI} + \frac{M_c L_2}{6EI} - \frac{M_{B3}L_3}{3EI} \quad (b)$$

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow 0 = M_{B1} + M_{B2} + M_{B3} \quad (c)$$

Pada persamaan simultan (a), (b) dan (c) diatas, nilai-nilai yang dicari adalah  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$  dan  $M_{B3}$ . Sedangkan nilai-nilai  $\alpha_{B1}$  dan  $\alpha_{B2}$  dapat diperoleh dari persamaan sudut belahan akibat beban luar;  $L_1$ ,  $L_2$  dan  $L_3$  diketahui dari soal; demikian pula  $M_c$  diperoleh dari  $P_2 \times L_4$

Setelah nilai momen di B diperoleh, maka reaksi tumpuan dapat dicari dengan diagram freebody. Total reaksi pada setiap tumpuan merupakan superposisi dari reaksi yang diperoleh dari diagram freebody.



Pada joint B berlaku persamaan berikut:

$$\alpha_{B1} = \beta_{B1} + \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B1} = \frac{M_{B1}L_1}{3EI} + \frac{M_D L_3}{6EI} + \frac{M_{B3}L_3}{3EI} \quad (a)$$

$$\alpha_{B2} = \beta_{B2} - \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B2} = \frac{M_{B2}L_2}{3EI} + \frac{M_c L_2}{6EI} - \frac{M_{B3}L_3}{3EI} - \frac{M_D L_3}{6EI} \quad (b)$$

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow 0 = M_{B1} + M_{B2} + M_{B3} \quad (c)$$

Pada tumpuan D berlaku persamaan berikut:

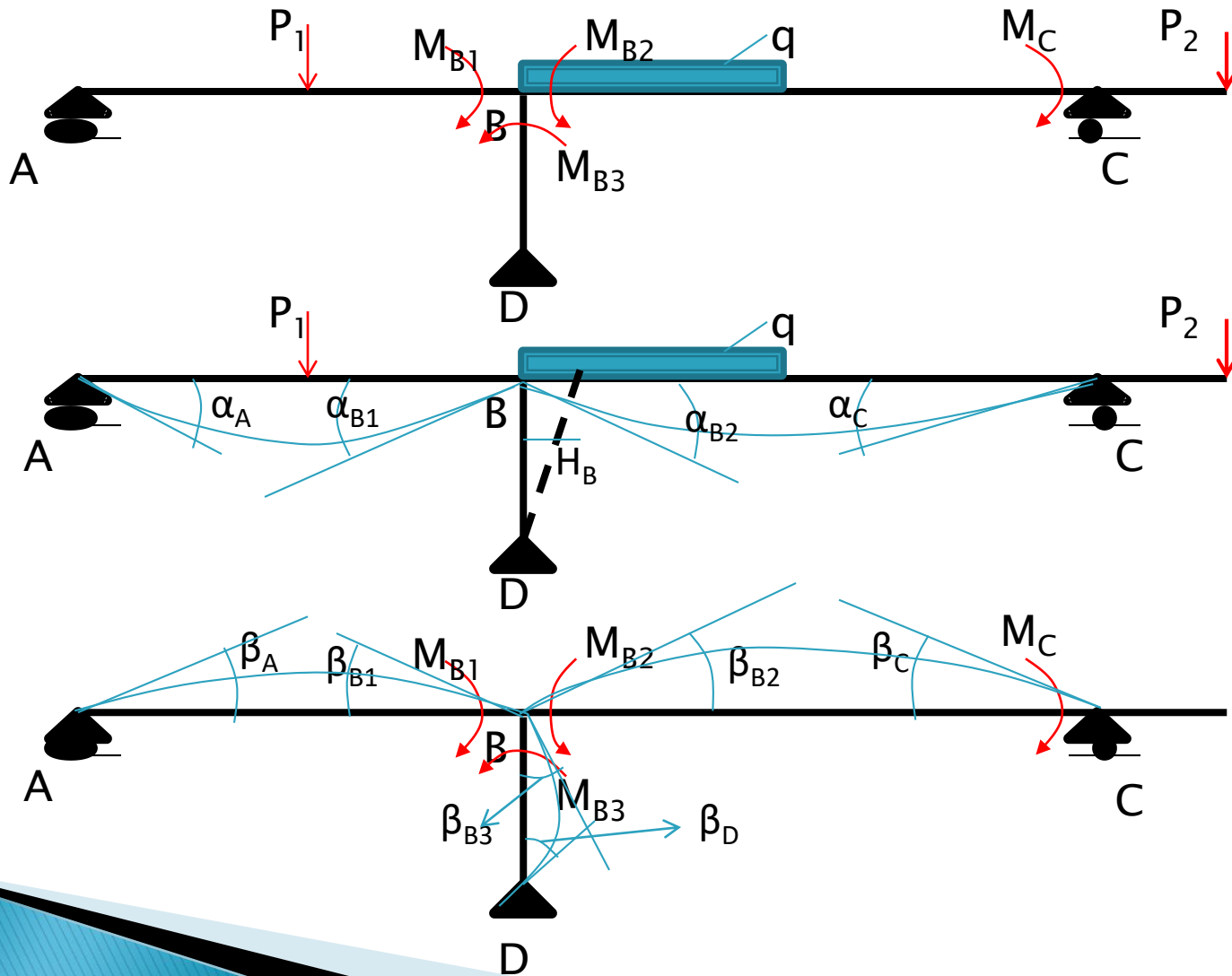
$$\alpha_D = \beta_D \longrightarrow 0 = \frac{M_{B3}L_3}{3EI} + \frac{M_D L_3}{6EI} \quad (d)$$

Pada persamaan simultan (a), (b), (c) dan (d) diatas, nilai-nilai yang dicari adalah  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$ ,  $M_{B3}$  dan  $M_D$ . Sedangkan nilai-nilai  $\alpha_{B1}$  dan  $\alpha_{B2}$  dapat diperoleh dari persamaan sudut belahan akibat beban luar;  $L_1$ ,  $L_2$  dan  $L_3$  diketahui dari soal; demikian pula  $M_c$  diperoleh dari  $P_2 \times L_4$

Setelah nilai momen di B dan D diperoleh, maka reaksi tumpuan dapat dicari dengan diagram freebody. Total reaksi pada setiap tumpuan merupakan superposisi dari reaksi yang diperoleh dari diagram freebody.



# Persamaan Tiga Momen (balok menerus dengan dukungan pilar dan pergeseran perletakan)



Pada joint B berlaku persamaan berikut:

$$\alpha_{B1} - \frac{H_B}{L_3} = \beta_{B1} + \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B1} - \frac{H_B}{L_3} = \frac{M_{B1}L_1}{3EI} + \frac{M_{B3}L_3}{3EI} \quad (a)$$

$$\alpha_{B2} + \frac{H_B}{L_3} = \beta_{B2} - \beta_{B3} \longrightarrow \alpha_{B2} + \frac{H_B}{L_3} = \frac{M_{B2}L_2}{3EI} + \frac{M_c L_2}{6EI} - \frac{M_{B3}L_3}{3EI} \quad (b)$$

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow 0 = M_{B1} + M_{B2} + M_{B3} \quad (c)$$

Pada persamaan simultan (a), (b) dan (c) diatas, nilai-nilai yang dicari adalah  $M_{B1}$ ,  $M_{B2}$  dan  $M_{B3}$ . Sedangkan nilai-nilai  $\alpha_{B1}$  dan  $\alpha_{B2}$  dapat diperoleh dari persamaan sudut belahan akibat beban luar;  $H_B/L_3$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  dan  $L_3$  diketahui dari soal; demikian pula  $M_c$  diperoleh dari  $P_2 \times L_4$

Setelah nilai momen di B diperoleh, maka reaksi tumpuan dapat dicari dengan diagram freebody. Total reaksi pada setiap tumpuan merupakan superposisi dari reaksi yang diperoleh dari diagram freebody.