Turunan

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menggunakan definsi untuk menentukan turunan suatu fungsi
2. Menggunakan rumus-rumus turunan untuk mencari turunan suatu fungsi
3. Memeriksa apakah suatu fungsi dapat diturunkan atau tidak pada suatu titik

Materi Ajar

Misal f adalah fungsi yang daerah asal definisinya memuat lingkungan dari titik z_0. Turunan dari f pada titik z_0, ditulis $f'(z_0)$ didefinisikan dengan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

(1)

jika limit ini ada. Fungsi f dikatakan dapat diturunkan pada z_0 jika turunannya ada pada z_0. Dengan menyatakan peubah z dalam peubah baru,

$$\Delta z = z - z_0,$$

kita dapat menuliskan (1) sebagai

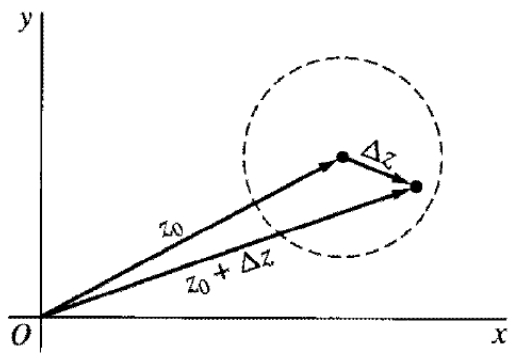
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

(2)

catat bahwa, karena f terdefinisi diseluruh lingkungan z_0 ,

$$f(z_0 + \Delta z)$$

selalu terdefinisi untuk $|\Delta z|$ cukup kecil.



Gambar 1

Jika menggunakan (2) , seringkali indeks dari z_0 tidak digunakan dan menggunakan bilangan baru

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z),$$

yang menunjukkan perubahan pada nilai f yang berkaitan dengan perubahan Δz pada titik di mana f dievaluasi. Jika kita menuliskan $\frac{dw}{dz}$ untuk $f'(z)$, maka (2) menjadi

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{3}$$

Contoh 1 :

Misal $f(z) = z^2$. Pada sebarang titik z

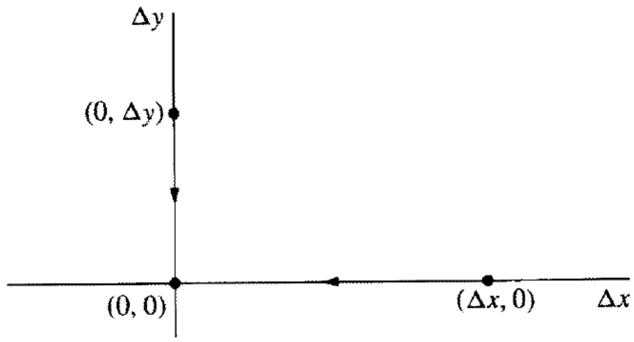
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z,$$

Karena $2z + \Delta z$ adalah polinomial dalam Δz. Sehingga $\frac{dw}{dz} = 2z$ atau $f'(z) = 2z$

Contoh 2 :

Tinjau kasus fungsi $f(z) = |z|^2$, dalam hal ini

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$



Gambar 2

Jika limit dari $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ada, maka seharusnya $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ mendekati titik asal pada bidang Δz dalam berbagai cara. Secara khusus, jika Δz mendekati titik asal secara horizontal melalui titik-titik $(\Delta x, 0)$ pada sumbu riil

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta x + i0 = \Delta z.$$

Dalam hal ini

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z.$$

Sehingga, jika limit $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ada, nilainya haruslah $\bar{z} + z$. Tetapi, jika Δz mendekati titik asal secara vertikal melalui titik $(0, \Delta y)$ pada sumbu imajiner, sehingga

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + i\Delta y} = -(0 + i\Delta y) = -\Delta z,$$

kita peroleh

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} - z.$$

Sehingga, jika $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ ada, nilainya haruslah $\bar{z} - z$. Karena nilai limit tunggal, maka

$$\bar{z} + z = \bar{z} - z,$$

atau $z = 0$, jika $\frac{dw}{dz}$ ada. Sebaliknya jika $z = 0$ maka , $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$, sehingga $\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ ada dan nilainya sama dengan nol. Kita simpulkan $\frac{dw}{dz}$ ada jika dan hanya jika $z = 0$ dan nilainya sama dengan nol.

Contoh 2 menunjukkan bahwa suatu fungsi dapat diturunkan pada suatu titik tertentu tetapi tidak dimanapun pada sebarang lingkungan dari titik tersebut. Karena bagian riil dan imajiner dari $f(z) = |z|^2$ adalah

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{and} \quad v(x, y) = 0,$$

juga dapat ditunjukkan bahwa bagian riil dan bagian imajiner dari fungsi variabel kompleks dapat memiliki turunan parsial yang kontinu untuk semu tingkatan pada titik tersebut tapi fungsinya tidak dapat diturunkan di sana.

Fungsi $f(z) = |z|^2$ kontinu pada setiap titik di bidang kompleks, karena bagian riil dan bagian imajinernya kontinu pada setiap titik. Jadi kekontinuan dari fungsi pada suatu titik tidak menjamin adanya turunan titik tersebut. Tetapi, adalah benar bahwa eksistensi turunan dari suatu fungsi pada suatu titik mengakibatkan kekontinuan dari fungsi pada titik tersebut. Untuk melihat hal tersebut, misalkan $f'(z_0)$ ada sehingga

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

Ini berarti

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

atau f kontinu pada z_0.

Interpretasi geometris dari turunan suatu fungsi kompleks tidak bisa dengan mudah dijelaskan seperti pada fungsi variabel riil. Ini akan di bahas pada tingkat lanjut, dan kita tidak akan membahasnya di sini.

Definisi turunan identik dalam bentuknya dengan fungsi variabel kompleks bernilai kompleks. Kenyataannya, rumus yang diberikan berikut ini dapat diturunkan dari definsi dengan langkah-langkah seperti pada kalkulus. Dalam rumus ini, turunan dari fungsi f pada titik z dinyatakan dengan

$$\frac{d}{dz} f(z) \quad \text{or} \quad f'(z),$$

tergantung notasi mana yang dianggap lebih nyaman untuk digunakan.

Misal c konstanta kompleks, dan misal f fungsi yang turunannya ada pada suatu titik . Dapat ditunjukkan dengan menggunakan definisi bahwa

$$\frac{d}{dz} c = 0, \quad \frac{d}{dz} z = 1, \quad \frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z)$$

(4)

juga jika n bilangan bulat positif maka

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}. \tag{5}$$

rumus ini juga benar untuk n bilangan bulat negatif asalkan $z \neq 0$. Jika turunan dari dua fungsi f dan F ada pada titik z, maka

$$\frac{d}{dz}[f(z) + F(z)] = f'(z) + F'(z),$$

(6)

$$\frac{d}{dz}[f(z)F(z)] = f(z)F'(z) + f'(z)F(z);$$

(7)

dan jika $F(z) \neq 0$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{[F(z)]^2}.$$

(8)

Seperti pada fungsi peubah riil pada fungsi peubah kompleks juga berlaku aturan rantai dalam menurunkan fungsi komposit. Misal f memiliki turunan pada z_0 dan g memiliki turunan pada $f(z_0)$. Maka fungsi $F(z) = g[f(z)]$ memiliki turunan pada z_0 dan

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0).$$

(9)

Jika kita tuliskan $w = f(z)$ dan $W = g(w)$ sehingga $W = F(z)$, aturan rantai menjadi

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}.$$

Contoh 3 :
Untuk mencari turunan dari $(2z^2 + i)^5$, tulis $w = 2z^2 + i$ dan $W = w^5$. Maka

$$\frac{d}{dz}(2z^2 + i)^5 = 5w^4 4z = 20z(2z^2 + i)^4.$$

Latihan :

1. Gunakan aturan pencarian turunan untuk mencari $f'(z)$, jika

   (a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$; (b) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$;

   (c) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$ $(z \neq -1/2)$; (d) $f(z) = \dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$ $(z \neq 0)$.

2. Tunjukkan bahwa

   (a) Polinomial

   $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

   yang berderajat n, $(n \geq 1)$, dapat diturunkan di mana-mana dengan turunan

   $$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1};$$

   (b) Koefisien polinomial $P(z)$ pada bagian (a) , dapat ditulis sebagai

   $$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

3. Dengan menggunakan definisi (3) , untuk membuktikan

   $$f'(z) = -\frac{1}{z^2} \quad \text{jika} \quad f(z) = \frac{1}{z} \ (z \neq 0).$$

4. Misal $f(z_0) = g(z_0) = 0$ dan $f'(z_0)$, $g'(z_0)$ ada dengan $g'(z_0) \neq 0$. Gunakan definisi (1) untuk menunjukkan bahwa

   $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

5. Buktikan aturan pencarian turunan jumlah dari dua fungsi

6. Buktikan pernyataan (2) untuk turunan dari z^n jika n bilangan bulat positif menggunakan :

   (a) Induksi matematika dan aturan pencarian turunan hasil kali dari dua fungsi

   (b) Definsi (3) untuk turunan dan rumus binomial

7. Buktikan pernyataan (2) untuk turunan dari z^n jika n bilangan bulat negatif ($n = -1, -2, \ldots$, asalkan $z \neq 0$

8. Tunjukkan bahwa $f'(z)$ tidak ada pada sebarang titik z jika

   $(a)\ f(z) = \bar{z}; \qquad (b)\ f(z) = \operatorname{Re} z; \qquad (c)\ f(z) = \operatorname{Im} z.$

9. Misal f adalah fungsi yang nilainya ditentukan oleh aturan pengaitan

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & \text{when } z \neq 0, \\ 0 & \text{when } z = 0. \end{cases}$$

   Tunjukkan bahwa jika $z = 0$, maka $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 1$ pada setiap titik pada sumbu riil dan imajiner dalam Δz atau bidang $\Delta x \Delta y$. Kemudian tunjukkan $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = -1$ pada titik $(\Delta x, \Delta y)$ pada garis $\Delta y = \Delta x$. Simpulkan dari hal tersebut bahwa $f'(0)$ tidak ada (Catat bahwa untuk mendapatkan hasil ini tidak cukup dengan hanya memperhatikan pendekatan horizontal dan vertikal ke titik asal pada bidang Δz)

Persamaan Cauchy Riemann

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Memeriksa apakah suatu fungsi memenuhi persamaan Cauchy-Riemann
2. Memeriksa apakah suatu fungsi dapat diturunkan
3. Menentukan titik-titik di mana suatu fungsi dapat diturunkan dan tidak dapat diturunkan

Materi Ajar

Pada bagian ini mendapatkan sepasang persamaan yang pasti dipenuhi oleh turunan parsial pertama dari bagian riil u dan bagian imajiner v dari fungsi

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

pada titik $z_0 = (x_0, y_0)$ jika turunan dari f ada di sana. Kita juga dapat menyatakan $f'(z_0)$ dalam suku-suku dari turunan parsialnya.

Teorema 1 :

Misal

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

dan $f'(z)$ *ada pada titik* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Maka turunan-turunan parsial pertama dari u dan* v *ada pada* (x_0, y_0) *dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

di titik tersebut. Selanjutnya $f'(z_0)$ *dapat ditulis sebagai*

$$f'(z_0) = u_x + iv_x,$$

dimana nilai turunan parsialnya dievaluasi pada titik (x_0, y_0)

Contoh 1 :

Kita pernah menunjukkan bahwa fungsi

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

dapat diturunkan pada setiap titik di bidang kompleks dan $f'(z) = 2z$, sehingga menurut teorema 1 maka turunan-turunan parsial pertamanya memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di mana-mana. Perhatikan

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{a} \quad \text{dan} \quad x, y) = 2xy.$$

sehingga

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

dan

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Dipenuhinya Ppersamaan Cauchy-Riemann adalah syarat perlu untuk melihat apakah suatu fungsi dapat diturunkan pada suatu titik, karenanya seringkali digunakan untuk melihat pada titik mana suatu fungsi tidak dapat diturunkan.

Contoh 2 :
Jika $f(z) = |z|^2$, kita punyai

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad ; \quad \text{dan} \quad (x, y) = 0.$$

Persamaan Cauchy-Rieman dipenuhi hanya pada titik (x, y) dengan $2x = 0$ dan $2y = 0$ yakni pada titik $(0,0)$. Dengan demikian kita bisa mengatakan bahwa f terdiferensial pada titik $(0,0)$, dengan $f'(0) = 0$ dan tidak terdiferensial pada sebarang titik tak nol pada bidang kompleks.

Catat bahwa berdasarkan teorema di atas dipenuhinya persamaan Cauchy-Riemann di suatu titik tidak menjamin adanya turunan di titik tersebut , tetapi dengan syarat kekontinuan tertentu kita mendapatkan teorema berikut :

Teorema 2 :

Misal

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Terdefinisi pada seluruh titik disuatu lingkungan-ε *dari* $z_0 = x_0 + iy_0$ *dan misal turunan parsial pertama dari fungsi* u *dan* v *terhadap* x *dan* y *ada di mana-mana dalam lingkungan tersebut. Jika turunan parsial pertamanya kontinu pada* (x_0, y_0) *dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

pada (x_0, y_0), *maka* $f'(z_0)$ *ada.*

Contoh 3 :
Tinjau fungsi eksponensial

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} \qquad (z = x + iy),$$

Dengan menggunakan rumus Euler fungsi tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

di mana y dihitung dalam radian jika $\cos y$ dan $\sin y$ dievaluasi. Karena $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ dimana-mana dan karena turunan parsialnya kontinu di mana-mana, maka syarat dari teorema 2 dipenuhi di setiap titik di bidang kompleks , sehingga $f'(z)$ ada di mana-mana dan

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Perhatikan bahwa $f'(z) = f(z)$

Contoh 4 :

Berdasarkan teorema 2, fungsi $f(z) = |z|^2$, yang komponennya

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad v(x, y) = 0,$$

memiliki turunan pada $z = 0$ dan $f'(0) = 0 + 0i = 0i$

Misal $z_0 \neq 0$, selanjutnya kita akan menggunakan transformasi koordinat

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

dan menyatakan teorema 2 dalam koordinat polar seperti berikut

Teorema 3 :

Misal

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

didefinisikan pada setiap titik di suatu lingkungan ε *pada suatu titik* $z_0 = r_0 \exp(i\theta)$*, dan anggap turunan parsial pertama dari fungsi* u *dan* v *terhadap* r *dan* θ *ada dimanapun pada lingkungan tersebut. Jika turunan parsial pertamanya kontinu pada* (r_0, θ_0) *dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar*

$$ru_r = v_\theta, \qquad u_\theta = -rv_r\ ,$$

pada titik (r_0, θ_0) *maka* $f'(z_0)$ *ada.*

$f'(z_0)$ dalam hal ini dapat dituliskan sebagai

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

yang dievaluasi di (r_0, θ_0)

Contoh 5 :

Tinjau fungsi

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (z \neq 0).$$

karena

$$u(r, \theta) = \frac{\cos\theta}{r} \quad \text{dan} \quad v(r, \theta) = -\frac{\sin\theta}{r},$$

syarat pada teorema 3 dipenuhi pada setiap titik $z = re^{i\theta}$ pada bidang. Khususnya persamaan Cauchy-Riemann

$$ru_r = -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \quad \text{dan} \quad = -\frac{\sin\theta}{r} = -rv_r$$

sehingga turunan dari f ada jika $z \neq 0$ dan

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -e^{-i\theta}\frac{e^{-i\theta}}{r^2} = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Contoh 6 :

Teorema 3 dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa jika ditetapkan suatu bilangan riil α , fungsi

$$f(z) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3} \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

memiliki turunan disetiap daerah asal definisinya. Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut. Karena

$$u(r,\theta) = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3} \quad \text{dan} \quad r,\theta) = \sqrt[3]{r}\sin\frac{\theta}{3}.$$

dan

$$ru_r = \frac{\sqrt[3]{r}}{3}\cos\frac{\theta}{3} = v_\theta \quad \text{dan} \quad = -\frac{\sqrt[3]{r}}{3}\sin\frac{\theta}{3} = -rv_r$$

syarat lainnya dari teorema (3) dipenuhi, maka $f'(z)$ ada pada setiap titik di mana $f(z)$ didefinisikan dan

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left[\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{r}\right)^2}\cos\frac{\theta}{3} + i\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{r}\right)^2}\sin\frac{\theta}{3}\right],$$

dan

$$f'(z) = \frac{e^{-i\theta}}{3\left(\sqrt[3]{r}\right)^2}e^{i\theta/3} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}\right)^2} = \frac{1}{3\left[f(z)\right]^2}.$$

Catat dalam hal ini bahwa jika suatu titik tertentu z di ambil pada daerah asal definsi dari f , maka nilai $f(z)$ adalah satu nilai dari $z^{1/3}$, sehingga pada nilai yang diambil tersebut

$$\frac{d}{dz}z^{1/3} = \frac{1}{3\left(z^{1/3}\right)^2}$$

Latihan :

1. Gunakan teorema 1 untuk menunjukkan bahwa $f'(z)$ tidak ada pada setiap titik, jika

$$(a)\ f(z) = \bar{z}; \qquad (b)\ f(z) = z - \bar{z}; \qquad (c)\ f(z) = 2x + ixy^2; \qquad (d)\ f(z) = e^x e^{-iy}.$$

2. Gunakan teorema 2 untuk menunjukkan $f'(z)$ dan turunannya $f''(z)$ ada di mana-mana dan cari $f''(z)$, jika

$$(a)\ f(z) = iz + 2; \qquad (b)\ f(z) = e^{-x}e^{-iy};$$
$$(c)\ f(z) = z^3; \qquad (d)\ f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

3. Periksa apakah $f'(z)$ ada dan cari nilainya, jika

$$(a)\ f(z) = 1/z; \qquad (b)\ f(z) = x^2 + iy^2; \qquad (c)\ f(z) = z \operatorname{Im} z.$$

4. Gunakan teorema 3 untuk menunjukkan bahwa setiap fungsi berikut dapat diturunkan pada daerah definisi dan kemudian gunakan (21) untuk mencari $f'(z)$

$$(a)\ \ f(z) = 1/z^4\ (z \neq 0);$$
$$(b)\ \ f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}\ (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi);$$
$$(c)\ \ f(z) = e^{-\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)\ (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi).$$

5. Tunjukkan bahwa jika $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$, maka kita boleh menuliskan

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2$$

hanya jika $z = i$

6. Misal u dan v menyatakan bagian riil dan bagian imajiner dari fungsi f yang didefinisikan dengan persamaan

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z} & \text{jika} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{jika} \quad z = 0. \end{cases}$$

Periksa apakah persamaan Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ dipenuhi pada titik asal tetapi $f'(0)$ tidak ada

7. Selesaikan persamaan

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \qquad u_\theta = -u_x r \sin\theta + u_y r \cos\theta.$$

dalam u_x dan v_x untuk menunjukkan

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r}, \qquad u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}.$$

Kemudian gunakan persamaan tersebut dan yang serupa untuk u_y dan v_y untuk menunjukkan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat

Cartesius dipenuhi pada titik z_0, jika persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar dipenuhi.

8. Misal fungsi $f(z) = u + iv$ dapat diturunkan pada suatu titik $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Gunakan pernyataan untuk u_x dan v_x seperti pada soal no 7 dan dengan persamaan Cauchy Riemann dalam bentuk polar untuk menuliskan pernyataan

$$f'(z_0) = u_x + iv_x$$

dalam bentuk

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

di mana u_r dan v_r di evaluasi di (r_0, θ_0).

9. (a). Dengan persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar, turunkan bentuk

alternatif

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta)$$

dari pernyataan $f'(z_0)$ pada soal no 8

(b). Gunakan ekspresi $f'(z_0)$ pada (a) , untuk menunjukkan bahwa turunan

dari

fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ $(z \neq 0)$ adalah $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

10. (a) Ingat kembali bahwa jika $z = x + iy$, maka

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{a]} \quad \text{dan} \quad = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Dengan menerapkan aturan rantai pada fungsi dua variabel riil $F(x, y)$

,

dapatkan

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

(b) Definisikan operator

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

Seperti yang disarankan pada bagian (a) untuk menunjukkan bahwa turunan

parsial orde pertama dari bagian riil dan imajiner fungsi

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ memenuhi persamaan Cauchy Riemann, maka

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)] = 0.$$