

## Daerah Pada Bidang Kompleks

### Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

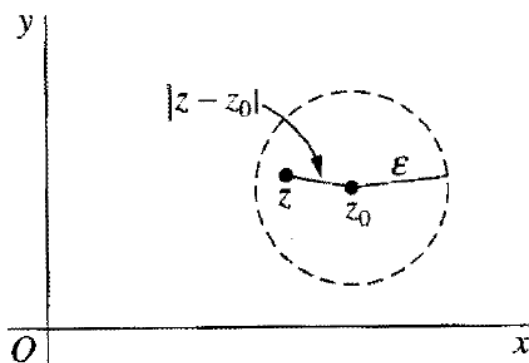
1. Memeriksa apakah suatu himpunan adalah himpunan buka, tutup atau bukan keduanya
2. Memeriksa apakah suatu himpunan terhubung
3. Memeriksa apakah suatu himpunan merupakan domain
4. Memeriksa apakah suatu himpunan merupakan daerah
5. Memeriksa apakah suatu titik adalah titik akumulasi

### Materi Ajar

Pada bagian ini kita akan memusatkan perhatian pada himpunan bilangan kompleks atau titik-titik pada bidang kompleks dan kedekatan mereka satu sama lain. Alat kita yang paling mendasar dalam hal ini adalah konsep lingkungan- $\varepsilon$

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (1)$$

dari titik  $z_0$  yang diberikan. *Lingkungan- $\varepsilon$*  terdiri dari semua titik-titik  $z$  yang terletak di dalam tapi tidak pada lingkaran dengan pusat  $z_0$  dan jari-jari  $\varepsilon$  (lihat Gambar 1)



Gambar 1

Suatu lingkungan dari titik  $z_0$  yang terdiri dari semua titik dalam lingkungan- $\varepsilon$  kecuali  $z_0$  itu sendiri, yakni

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad (2)$$

dinamakan *lingkungan yang dihapuskan*.

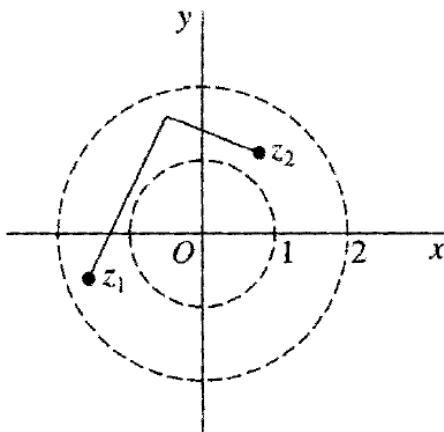
Suatu titik  $z_0$  dikatakan *titik dalam* dari himpunan  $S$  jika terdapat lingkungan dari  $z_0$  yang hanya memuat titik-titik dari  $S$  dan dikatakan *titik luar* dari  $S$  jika terdapat lingkungan yang tidak memuat titik-titik dari  $S$ . Jika  $z_0$  bukan titik dalam dan juga bukan titik luar, maka  $z_0$  disebut *titik batas* dari  $S$ . Jadi titik batas adalah titik yang

setiap lingkungannya memuat titik dari  $S$  dan memuat titik yang bukan anggota  $S$ . Himpunan dari semua titik batas dari  $S$  disebut *batas* dari  $S$ .

Suatu himpunan dikatakan *buka* jika tidak memuat satupun titik batas. Suatu himpunan dikatakan himpunan *tutup* jika memuat semua titik batasnya. *Penutup* dari  $S$  adalah himpunan tutup yang terdiri dari semua titik di  $S$  beserta batas dari  $S$ .

Terdapat himpunan yang bukan merupakan himpunan buka dan juga bukan himpunan tutup. Suatu himpunan dikatakan himpunan tidak buka, jika terdapat titik batas yang termuat dalam himpunan tersebut. Suatu himpunan dikatakan tidak tertutup jika terdapat titik batas yang tidak termuat di dalam himpunan.

Suatu himpunan  $S$  dikatakan himpunan *terhubung* jika setiap titik  $z_1$  dan  $z_2$  di  $S$  dapat dihubungkan oleh garis poligonal yang terdiri dari berhingga ruas garis yang dihubungkan ujung-ujungnya, dan semuanya terletak di dalam  $S$ . Himpunan buka yang terhubung disebut *domain*. Catat bahwa sebarang lingkungan adalah domain. Domain bersama-sama dengan beberapa, tidak ada, atau semua titik-titik batasnya disebut *daerah*.



Gambar 2

Suatu himpunan disebut himpunan *terbatas* jika setiap titik  $S$  terletak pada suatu lingkaran  $|z| = R$ , jika tidak demikian maka dikatakan tidak terbatas. Suatu titik  $z_0$  dikatakan *titik akumulasi* dari himpunan  $S$  jika setiap lingkungan yang dihapuskan dari  $z_0$  memuat paling kurang satu titik dari  $S$ . Selanjutnya jika  $S$  himpunan tutup maka  $S$  akan memuat semua titik akumulasi.

**Latihan :**

1. Diberikan himpunan-himpunan

$$\begin{array}{ll} (a) |z - 2 + i| \leq 1; & (b) |2z + 3| > 4; \\ (c) \operatorname{Im} z > 1; & (d) \operatorname{Im} z = 1; \\ (e) 0 \leq \arg z \leq \pi/4 \ (z \neq 0); & (f) |z - 4| \geq |z|. \end{array}$$

Buat sketsa dari himpunan tersebut dan tentukan yang mana yang merupakan himpunan buka, himpunan tutup atau domain

2. Tentukan penutup dari himpunan berikut

$$\begin{array}{ll} (a) -\pi < \arg z < \pi \ (z \neq 0); & (b) |\operatorname{Re} z| < |z|; \\ (c) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}; & (d) \operatorname{Re}(z^2) > 0. \end{array}$$

3. Misal  $S$  adalah himpunan buka yang terdiri dari semua  $z$  dengan  $|z| < 1$  atau  $|z - 2| < 1$ . Jelaskan mengapa  $S$  tidak buka

4. Tunjukkan bahwa  $S$  buka jika dan hanya jika setiap titik di  $S$  adalah titik dalam

5. Tentukan titik-titik akumulasi dari himpunan berikut

$$\begin{array}{ll} (a) z_n = i^n \ (n = 1, 2, \dots); & (b) z_n = i^n/n \ (n = 1, 2, \dots); \\ (c) 0 \leq \arg z < \pi/2 \ (z \neq 0); & (d) z_n = (-1)^n(1 + i) \frac{n-1}{n} \ (n = 1, 2, \dots) \end{array}$$

6. Buktikan bahwa jika suatu himpunan memuat setiap titik akumulasinya, maka himpunan tersebut tutup

7. Tunjukkan bahwa setiap titik  $z_0$  pada suatu domain adalah suatu titik akumulasi dari domain tersebut

8. Tunjukkan bahwa sebarang himpunan hingga dari titik-titik  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tidak memiliki titik akumulasi