Menggambar Grafik Fungsi
dan
Menyelesaikan Masalah Optimasi

UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Membedakan masalah optimasi yang direduksi menjadi masalah mencari nilai maksimum-minimum fungsi kontinu pada selang tutup dengan masalah optimasi mencari nilai maksimum-minimum fungsi kontinu pada selang buka
2. Menyelesaikan masalah optimasi
3. Mengidentifikasi perilaku grafik fungsi terkait dengan turunan
4. Menggambar grafik fungsi

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Menggambar Grafik Fungsi

Cara yang paling sederhana untuk menggambar grafik fungsi adalah dengan menghubungkan titik-titik sedemikian sehingga kita mendapatkan gambaran umum tentang grafiknya. Mengetahui sumbu simetri juga membantu kita dalam menggambar grafik. Tetapi informasi tersebut seringkali belum cukup untuk mendapatkan suatu gambar yang benar-benar akurat.

Kalkulus menyediakan alat yang bisa digunakan untuk menganalisa struktur grafik, terutama mengidentifikasi tempat-tempat dimana perilaku grafik berubah. Kita dapat menentukan lokasi titik maksimum lokal,mimimum lokal, titik belok. Kita juga dapat menentukan pada interval mana fungsi naik atau turun, di mana cekung ke atas atau ke bawah.

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Buat sketsa kurva $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3}$

Selain turunan , kita juga memanfaatkan limit tak hingga dan limit di ketak hinggaan. Terkait dengan ini kita mengenal istilah asimtot tegak, asimtot datar dan asimtot miring seperti berikut ini

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Asimtot

Asimtot adalah suatu garis lurus atau lengkung yang didekati oleh suatu grafik fungsi kontinu setelah melewati batas tertentu dan setelah batas ini asimtot dan grafik fungsinya tidak berpotongan lagi

Yang akan kita pelajari adalah asimtot yang berbentuk garis lurus

Definisi :

Garis $x = c$ dikatakan asimtot tegak dari kurva $y = f(x)$ jika berlaku salah satu dari yang berikut

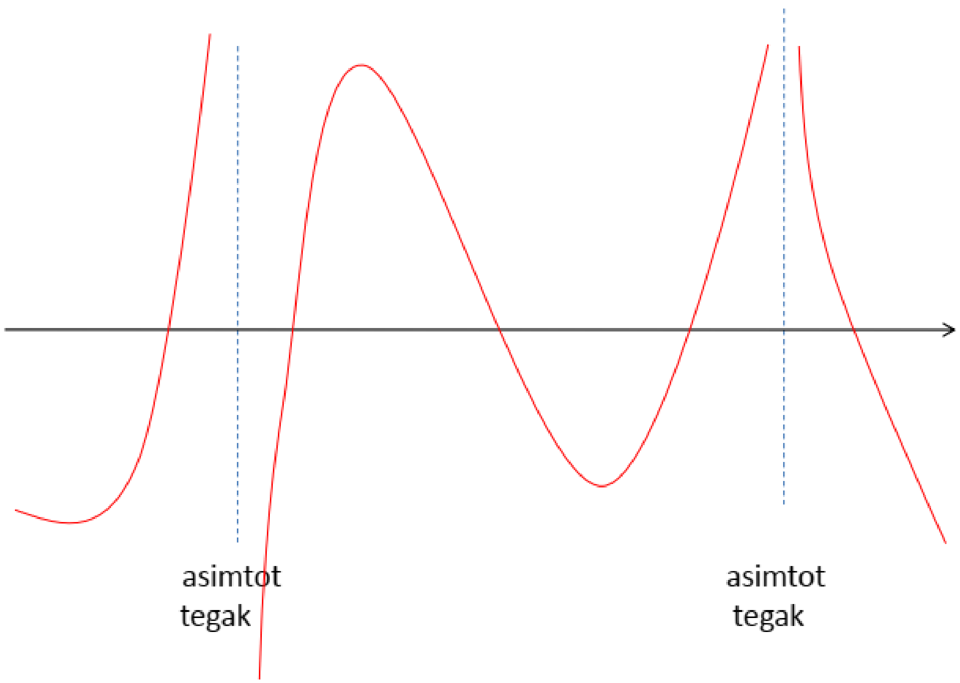
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$$

UNS

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Ilustrasi



Catatan :

- Suatu grafik fungsi kontinu paling banyak memotong asimtot tegak di satu titik
- Suatu grafik fungsi kontinu yang daerah asalnya adalah $\mathbb{R}$ tidak mempunyai asimtot tegak

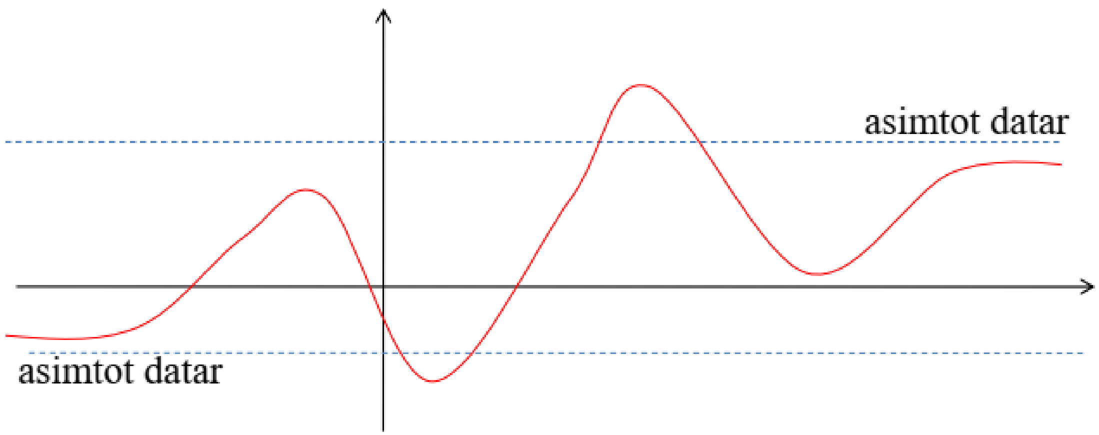
Definisi :

Garis $y = b$ dikatakan asimtot datar dari kurva $y = f(x)$ jika kedua syarat berikut di penuhi

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

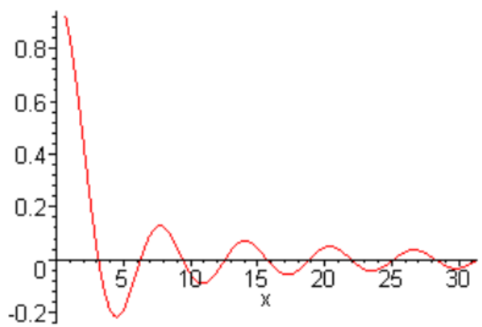
2. setelah batas tertentu grafik fungsi $y = f(x)$ tidak memotong lagi garis $y = b$

Ilustrasi :



Catatan :

- Suatu grafik fungsi kontinu paling banyak mempunyai dua asimtot datar
- Jika garis $y = b$ hanya memenuhi salah satu syarat belum tentu garis tersebut adalah asimtot datar



Kurva $y = \dfrac{\sin x}{x}$ memotong garis $y = 0$ di tak berhingga titik

Jadi garis $y = 0$ bukan asimtot datar dari grafik $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

UNS
UNIVERSITAS SEBELAS MARET

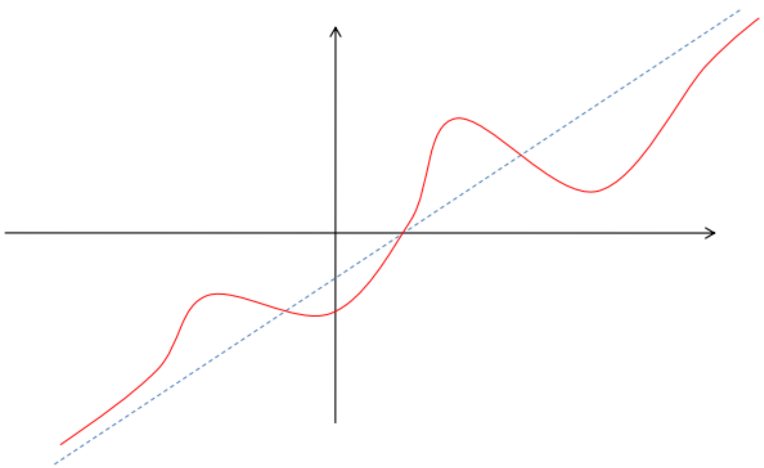
Definisi :

Garis $y = mx + b$, $m \neq 0$ dikatakan asimtot miring dari kurva $y = f(x)$ jika syarat yang berikut dipenuhi

1. $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ atau $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$
2. setelah batas tertentu grafik fungsi $y = f(x)$ tidak memotong lagi garis $y = mx + b$

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

Ilustrasi



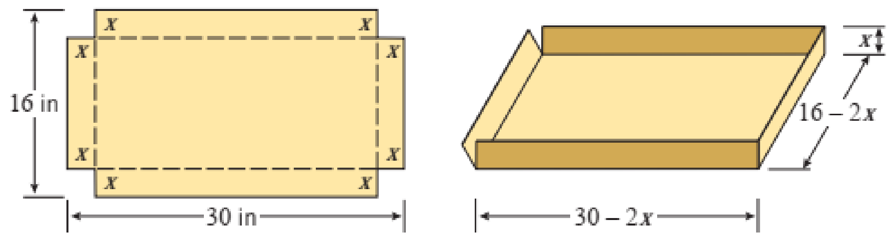
Teorema

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - mx = b$ dan garis $y = mx + b$, $m \neq 0$ tidak memotong lagi grafik fungsi f setelah batas tertentu jika dan hanya jika garis $y = mx + b$ adalah asimtot miring dari grafik fungsi f

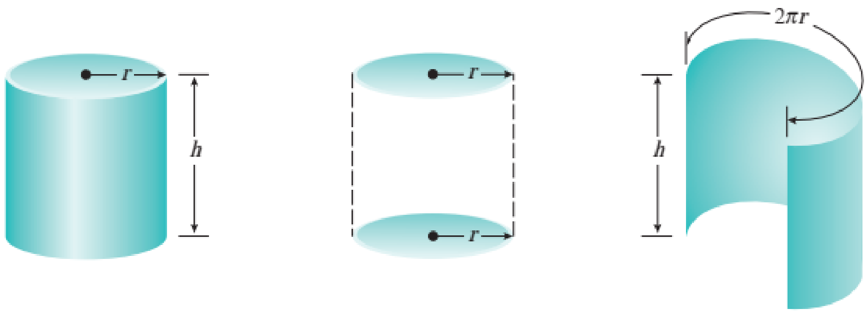
Untuk membantu menggambar grafik fungsi kumpulkan informasi tentang :

1. Daerah asal
2. Titik kritis, kemonotonan, nilai maksimum dan minimum lokal
3. Kecekungan dan titik belok
4. Asimtot
5. Titik potong dengan sumbu-x dan titik potong dengan sumbu-y

Sebuah kotak terbuka dibuat dari 16×30 inci karton yang dibuang dari empat pojoknya persegi dan dilipat sisi-sisinya. Berapa ukuran persegi agar diperoleh kotak dengan volume terbesar ?



Silinder tertutup dapat menampung 1 liter (1000cm^3) cairan. Bagaimana kita harus membuat tinggi dan jari-jarinya untuk meminimalkan banyaknya material yang dibutuhkan untuk memproduksinya ?



Area $2\pi r^2$

Area $2\pi rh$

Dalam menyelesaikan masalah terapan optimasi, langkah yang berikut ini bisa membantu :

1. Baca/pahami masalahnya.
2. Buat gambar yang mengilustrasikan masalah
3. Perkenalkan variabel.
4. Tulis suatu persamaan untuk suatu kuantitas yang tidak diketahui.
5. Uji titik kritis pada daerah asal dari variabel.

UNIVERSITAS SEBELAS MARET