Pertemuan 10

Indikator Pencapaian Hasil Belajar

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

1. Menggunakan aturan rantai dan menggunakannya untuk mencari turunan dari suatu fungsi
2. Menggunakan berbagai notasi dalam pencarian turunan
3. Menentukan turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi
4. Mencari turunan dari suatu fungsi secara implisit
5. Menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan laju yang berkaitan

Materi Ajar

Aturan Rantai

Aturan pencarian turunan dan rumus turunan fungsi trigonometri yang telah kita punya dalam banyak kasus sulit untuk digunakan. Misalnya untuk mendapatkan turunan dari $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)^{50}$ maka kita harus melakukan perkalian sebanyak 50 kali faktor $(3x^2 - 4x + 1)$. Untuk mencari turunan dari $\sin 3x$, kita harus menggunakan identitas-identitas trigonometrik untuk mendapatkan sesuatu yang bergantung pada $\sin x$ dan $\cos x$. Untungnya terdapat cara yang lebih baik, yang memudahkan kita untuk menentukan turunan suatu fungsi, yang di kenal dengan aturan rantai

Teorema:

Misal $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x)) = fog(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$ maka fog terdiferensialkan di x dan $fog'(x) = f'(g(x))'g'(x)$ atau $D_x y = D_u y D_x u$

Soal :

1. Tentukan $D_x y$ jika

   (i) $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$ (ii) $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$ (iii) $y = x\sin^2 2x$

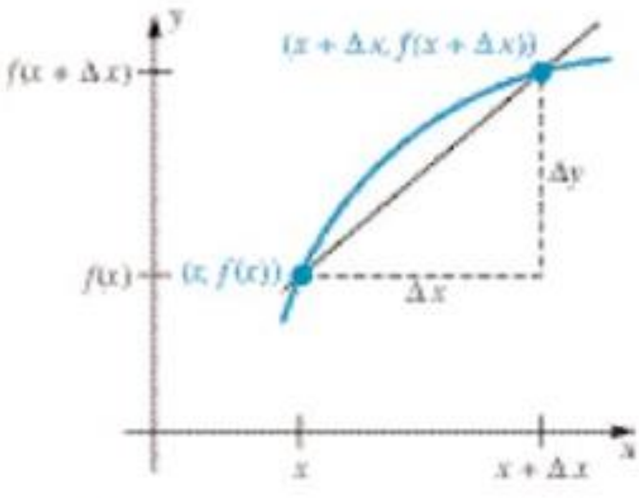
2. Tentukan $D_x y$

   a. $\left[(x^2 + 1)\sin x\right]^3$ b. $y = \dfrac{(x^3 + 2x)^4}{x^4 + 1}$

Notasi Leibniz

Misal $y = f(x)$ menyatakan suatu fungsi dalam peubah x . Misal peubah bebas x berubah dari x ke $x + \Delta x$, maka perubahan yang berpadanan dalam peubah tak bebas y adalah $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ dan $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah kemiringan talibusur yang melalaui $(x, f(x))$. Jika $\Delta x \to 0$ maka kemiringan tali busur akan mendekati kemiringan garis singgung. Leibniz menggunakan lambang $\dfrac{dy}{dx}$ untuk menyatakan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$



Selanjutnya pandang $\dfrac{d}{dx}$ sebagai lambang operator yang sama dengan D_X . Semua teorema tentang turunan tetap berlaku, hanya penulisannya berbeda.

Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendiferensialan terhadap f mengahasilkan sebuah fungsi baru f'. Jika operasi pendiferensialan dilakukan pada f'akan diperoleh f'' (dibaca f dua aksen) dan disebut turunan kedua. Jika operasi pendiferensialan dilakukan pada f''akan diperoleh fungsi f'''dan disebut turunan ketiga. Cara penulisan untuk turunan dari $y = f(x)$ adalah sebagai berikut :

Turunan-ke	Notasi f'	Notasi y'	Notasi D_x	Notasi Leibniz
1	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
2	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
3	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
4	$f^{(4)}(x)$	$y^{(4)}$	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
. . .				
n	$f^{n}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

<u>Soal :</u>

1. Cari $\frac{d^3 y}{dx^3}$

   a. $y = \frac{x}{2x+1}$ b. $y = x \cos \pi x$

2. Tentukan $f''(0)$ jika $f(x) = \sin 3x + \sin^2 3x$

Pencarian Turunan Secara Implisit

Misal $y^3 + 7y = x^3$, bagaimana menentukan $\frac{dy}{dx}$? Kita mengalami kesulitan untuk secara eksplisit menyatakan y dalam peubah x dan kemudian menghitung $\frac{dy}{dx}$. Masalah tersebut dapat diatasi dengan mendiferensialkan kedua ruas terhadap x. Mencari $\frac{dy}{dx}$ dengan tanpa menyatakan y secara eksplisit dalam x terlebih dahulu disebut pencarian turunan secara implisit.

Soal :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui y adalah fungsi dari x

1. $y^5 + x^2 y^3 = 1 + x^4 y$
2. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
3. $\cos(x - y) = y \sin x$

Laju yang Berkaitan

Jika variabel y bergantung pada waktu t, maka $\frac{dy}{dt}$ disebut laju perubahan terhadap waktu. Jika y diberikan secara eksplisit sebagai fungsi t, maka masalah mencari $\frac{dy}{dt}$ dapat dilakukan denggan menggunakan berbagai cara yang sesuai dan telah kita pelajari sebelum ini.

Bisa jadi dalam suatu situasi kita tidak mengetahui secara eksplisit hubungan variabel y dengan variabel t, tapi kita mengetahui hubungan y dengan variabel x dan memiliki informasi tentang $\frac{dx}{dt}$. Dalam hal ini kita masih bisa mencari $\frac{dy}{dt}$, karena $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ adalah laju-laju yang berkaitan.

Soal :

1. Balon dilepaskan dari suatu titik yang jauhnya 150m dari pengamat yang berada di tanah. Jika balon naik lurus ke atas dengan laju 8m/det, berapa laju perubahan jarak dari pengamat ketika balon berada pada ketinggian 50m
2. Air dituangkan ke dalam wadah yang berbentuk kerucut dengan laju $8m^3$/menit. Jika tinggi wadah adalah 12 m dan jari-jari tutupnya adalah 6m, berapa laju perubahan permukaan air ketika kedalaman air 4m

Tugas 10

1. Dengan menggunakan aturan rantai tunjukkan bahwa $D_x|x| = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$ (ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$, kemudian gunakan hasil tersebut untuk menghitung $D_x^2|\sin x|$

2. Tentukan : a. $D_x\left[\frac{(3t^2-2)^2}{t+5}\right]^3$ b. $\frac{d}{dx}[\sin t \tan(t^2+1)]^2$

3. Jika $4x^2 + 9y^2 = 36$ tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$

4. Seorang wanita yang berdiri di tepi sebuah tebing mengamati melalui teleskop sebuah perahu bermotor yang bergerak mendekati pantai yang terletak pas di bawah tebing tempat dia berdiri. Jika teleskop berada 250 m di atas permukaan air dan jika perahu mendekati pantai dengan kecepatan 20m/det, berapa laju perubahan sudut teleskop ketika perahu berada pada 250m dari pantai.

5. Suatu kolam renang yang berbentuk persegi panjang memilki panjang 12m dan lebar 6m kedalaman 2,5m pada bagian yang paling dalam dan 1m pada bagian yang paling dangkal Jika ke dalam kolam renang dipompakan air dengan laju 12m^3/menit, berapa laju perubahan permukaan air pada ketinggian 1m dari dasar kolam yang paling dalam.