## Pertemuan 9

**Indikator Pencapaian Hasil Belajar**

Mahasiswa menunjukkan kemampuan dalam :

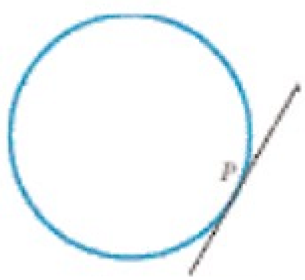
1. Memutuskan apakah suatu fungsi dapat diturunkan atau tidak di suatu titik
2. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan definisi
3. Menjelaskan hubungan antara keterdiferensialan dan kekontinuan
4. Mengidentifikasi kasus-kasus di mana suatu fungsi tidak dapat diturunkan
5. Menentukan turunan dari suatu fungsi dengan menggunakan aturan pencarian turunan

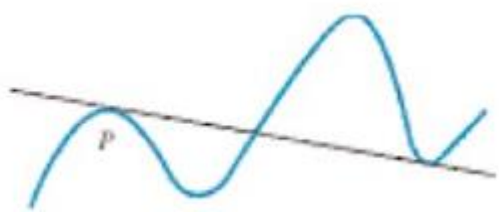
**Materi Ajar**

Pada pembahasan berikut kita akan melihat satu tipe limit yang muncul dari dua masalah yang berbeda.

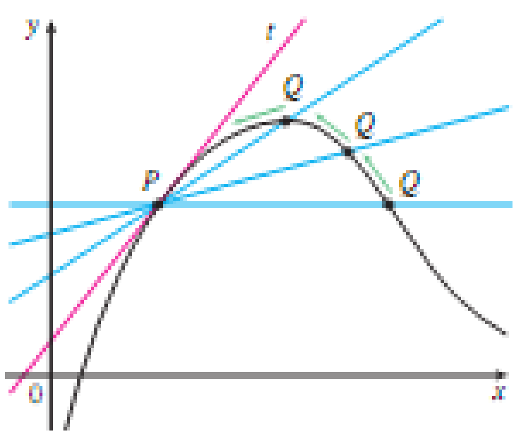
**Garis singgung**

Gagasan bahwa garis singgung adalah garis yang menyentuh kurva di satu titik benar untuk lingkaran, tapi tidak untuk kebanyakan kurva ( lihat ilustrasi berikut )

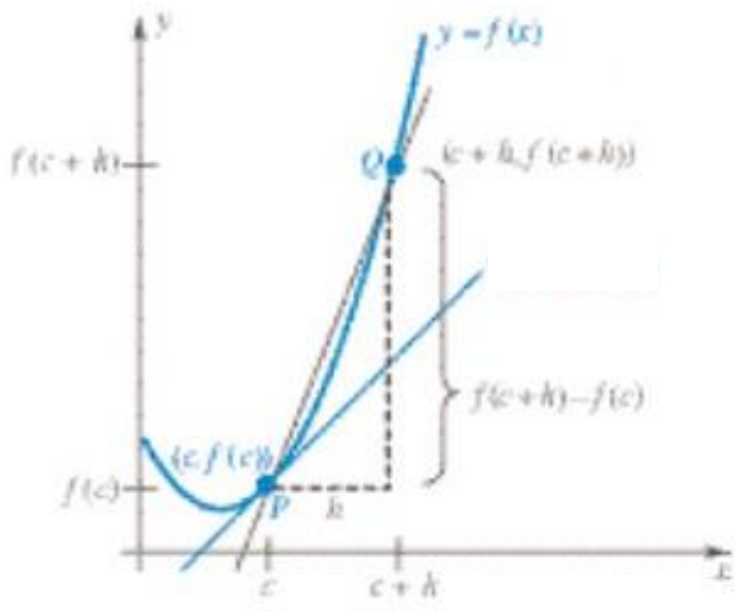



Gagasan garis singgung kurva pada titik P sebagai garis yang merupakan aproksimasi terbaik terhadap kurva di sekitar titik P adalah gagasan yang lebih baik, tapi masih kurang jelas secara matematis.




Konsep limit memberikan cara untuk mendapatkan deskripsi yang paling baik tentang gagasan garis singgung.




Misal suatu kurva adalah grafik fungsi dengan persamaan $y = f(x)$. Misal P memiliki koordinat $P(c, f(c))$ dan titik $Q$ di dekatnya mempunyai koordinat $Q(c+h, f(c+h))$. Tali busur $PQ$ memiliki gradien $m_{PQ} = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Dengan menggunakan konsep limit, definis formal dari garis singgung diberikan sebagai

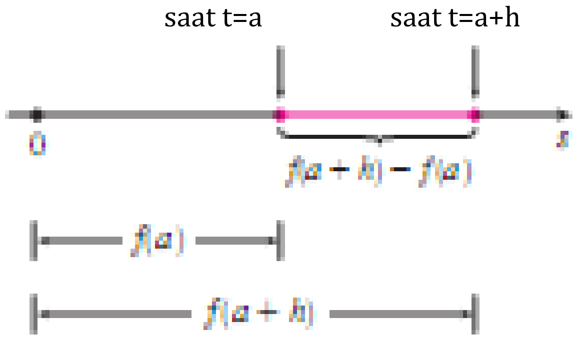
**Definisi**
Garis singgung terhadap kurva $y = f(x)$ pada titik $P(c, f(c))$ adalah garis yang melalui $P$ dan dengan kemiringan

$$m_{gsP} = \lim_{h \to 0} m_{\text{talibusur}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limitnya ada dan bukan $\infty$ atau $-\infty$

**Kecepatan Sesaat**

Misal suatu objek bergerak sepanjang garis lurus dengan persamaan $s = f(t)$, yang menunjukkan jarak ( berarah ) objek terhadap titik asal setelah waktu $t$ dan sering disebut sebagai fungsi posisi. Pada interval $t = a$ sampai dengan $t = a + h$ perubahan posisi adalah $f(a+h) - f(a)$




Kecepatan rata-rata pada interval waktu tersebut adalah :

$$\text{kecepatan rata} - \text{rata} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Selanjutnya kita tinjau kecepatan rata-rata pada interval waktu $[a, a+h]$ yang semakin pendek, dengan kata lain $h$ mendekati 0.

**Definisi**
Jika objek bergerak sepanjang garis lurus dengan posisi f(t), maka kecepatan sesaat pada saat a adalah

$$v_{\text{pada a}} = \lim_{h \to 0} v_{\text{rata-rata [a,a+h]}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan limitnya ada dan bukan $\infty$ atau $-\infty$

**Turunan**

Kita telah melihat bahwa gagasan kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat memberikan bentuk limit yang sama. Selanjutnya kita akan membahas lebih jauh bentuk limit tersebut secara khusus.

**Definisi :**

Turunan fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$ ( dibaca f aksen ) yang nilainya pada sebarang bilangan riil $x$ adalah $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ ada untuk suatu bilangan riil $c$, maka kita katakan $f$ dapat diturunkan di $c$ dan ditulis $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$. Pencarian turunan disebut pendiferensialan.

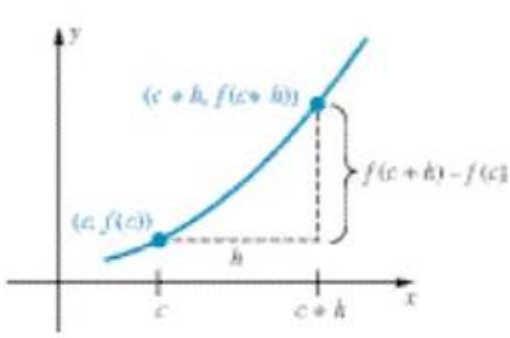
<u>Soal</u> :

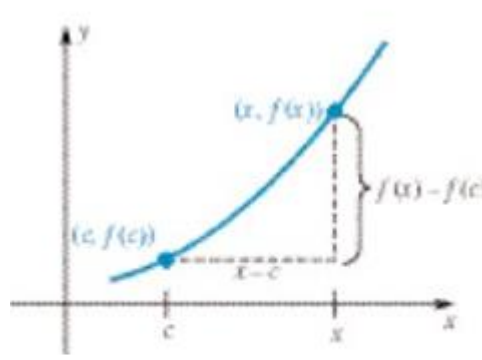
1. Gunakan definisi $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ untuk menentukan $f'(3)$ jika $f(x) = x^2 - x$
2. Gunakan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk menentukan $f'(x)$, jika $f(x) = \sqrt{3x}$
3. $\lim_{h \to 0} \frac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$ adalah nilai suatu turunan dari suatu fungsi di suatu titik. Fungsi apa dan di titik mana ?

Penggunaan huruf $h$ dalam definisi yang dituliskan di atas bukan sesuatu yang keramat, perhatikan yang berikut ini :

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{p \to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s} \end{aligned}$$

Selanjutnya perhatikan ilustrasi berikut ini



Dengan menggantikan $c+h$ dengan $x$ dan $h$ dengan $x-c$, maka bentuk limit di atas dapat ditulis sebagai

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

<u>Soal</u> :

1. Gunakan definisi $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ untuk menentukan $f'(4)$ jika $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
2. Gunakan $f'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ untuk menentukan $f'(x)$, jika $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
3. $\lim\limits_{t \to x} \dfrac{t^3 - x^3}{t-x}$ adalah nilai suatu turunan dari suatu fungsi di suatu titik. Fungsi apa dan di titik mana ?

Jika kurva memiliki garis singgung pada suatu titik maka kurva tidak mungkin terdapat lompatan atau terlalu banyak goyangan pada titik tersebut. Fakta tersebut secara persis dirumuskan dalam teorema berikut :

**Teorema**

Jika $f'(c)$ ada maka $f$ kontinu di $c$

Tidak benar mengatakan bahwa jika suatu fungsi kontinu di suatu titik maka fungsi tersebut dapat di turunkan di titik tersebut

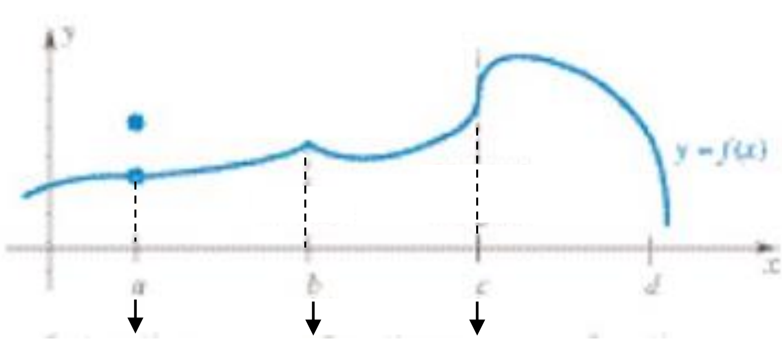
<u>Soal</u>:

Tunjukkan bahawa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tapi tidak dapat diturunkan di titik tersebut

Pernyataan " jika $f$ tidak kontinu di $c$ maka $f'(c)$ tidak ada " ekivalen dengan teorema di atas dan bisa digunakan untuk menunjukkan suatu fungsi tidak dapat diturunkan di suatu titik. Selain ketidak kontinuan ada beberapa hal lain yang dapat menyebabkan suatu fungsi tidak dapat diturunkan.

Misal $f'_{+}(c) = \lim\limits_{x \to c^{+}} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ dan $f'_{-}(c) = \lim\limits_{x \to c^{-}} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ . $f'(c)$ tidak ada dapat terjadi jika $f'_{+}(c)$ dan $f'_{-}(c)$ masing-masingnya ada tapi berbeda, pada kurva hal tersebut dikenali dengan adanya pojok tajam. Selain itu $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = \infty$ juga menyebabkan $f'(c)$ tidak ada, hal tersebut dikenali dengan garis singgung vertikal pada kurva.

Ilustrasi berikut memberikan gambaran titik-titik di mana suatu fungsi tidak dapat didiferensialkan :




Tidak kontinu

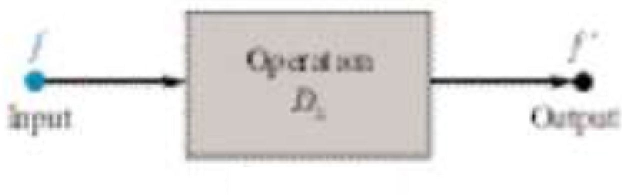
Pojok tajam

Garis singgung vertikal

## Aturan Pencarian Turunan

Proses untuk mencari turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan dapat membutuhkan waktu dan menjemukan. Berikut ini kita akan membangun alat yang membantu kita untuk memotong proses tersebut , dan memungkinkan kita mencari turunan dari fungsi-fungsi yang lebih rumit.

Turunan dari fungsi $f$ adalah fungsi lain . Kita sering menggunakan simbol $D_x$ untuk menunjukkan operasi pencarian turunan. Simbol $D_x$ mengatakan bahwa kita menentukan turunan terhadap variabel $x$. $D_x$ adalah contoh operator.




***Aturan Pencarian Turunan :***

1. *Jika* $f(x)=k$, $k$ *konstanta maka* $f'(x)=0$, *atau* $D_x k=0$
2. *Jika* $f(x)=x$ *maka* $f'(x)=1$ *atau* $D_x x=1$
3. *Jika* $f(x)=x^n$, $n$ *bilangan positif maka* $f'(x)=nx^{n-1}$ *atau* $D_x x^n=nx^{n-1}$
4. *Jika* $f$ *terdiferensial dan* $k$ *konstanta maka* $(kf)'(x)=kf'(x)$ *atau* $D_x(kf(x)=kD_x f(x)$
5. *Jika* $f$ *dan* $g$ *terdiferensial, maka*
   *(i)* $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$ *atau* $D_x(f+g)(x)=D_x f(x)+D_x g(x)$
   *(ii)* $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$ *atau* $D_x(f-g)(x)=D_x f(x)-D_x g(x)$
   *(iii)* $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ *atau* $D_x(fg)(x)=g(x)D_x f(x)+f(x)D_x g(x)$
   *(iv)* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x)\neq 0$ *atau*

   $$D_x\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)D_x f(x)-f(x)D_x g(x)}{(g(x))^2}, g(x)\neq 0$$

Dengan menggunakan aturan pencarian turunan di atas kita dapat menunjukkan bahwa fungsi polinomial dapat diturunkan di mana-mana dan fungsi rasional juga dapat diturunkan di mana-mana kecuali di titik-titik di mana penyebutnya bernilai 0.

Soal :

1. Tentukan $D_x y$

   a. $y=(x^2+17)(x^3-3x+1)$ b. $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$

2. Tunjukkan bahwa aturan pangkat berlaku untuk pangkat bilangan bulat negatif, yakni $D_x(x^{-n})=-nx^{-n-1}$

**Turunan Fungsi Trigonometri**

Kita bisa menemukan rumus turunan dari fungsi $\sin x$ dan $\cos x$ langsung dari definisi . Perhatikan yang berikut ini :

$$\begin{aligned} D_x(\sin x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left( -\sin x \frac{1-\cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= (-\sin x)\left[ \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} \right] + (\cos x)\left[ \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \right] \end{aligned}$$

Telah kita ketahui bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$$

Maka

$$D_x(\sin x) = (-\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x$$

dan $\sin x$ dapat diturunkan di mana-mana. Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $D_x \cos x = -\sin x$ dan $\cos x$ juga dapat diturunkan di mana-mana.

Selanjutnya dengan menggunakan aturan pencarian turunan kita dapat menunjukkan yang berikut ini :

$$\begin{aligned} D_x \tan x &= \sec^2 x & \qquad D_x \cot x &= -\csc^2 x \\ D_x \sec x &= \sec x \tan x & \qquad D_x \csc x &= -\csc x \cot x \end{aligned}$$

Soal :

Tentukan $D_x y$

a. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

b. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x \sin x}$

**Tugas 9**

1. Tentukan titik-titik dimana $g(x) = x(|x| - 2)$ dapat diturunkan dan titik-titik di mana fungsi tidak dapat diturunkan dan kemudian berikan rumus turunannya

2. Misal $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$

   a. Dengan menggunakan definisi tunjukkan $f$ terdiferensial di $x = 0$ dan tentukan $f'(0)$

   b. Cari $f'(x)$ untuk $x \neq 0$

3. Misal $f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{jika } x < 2 \\ x^2 & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$. Tentukan $m$ dan $b$ agar $f$ dapat diturunkan dimana-mana