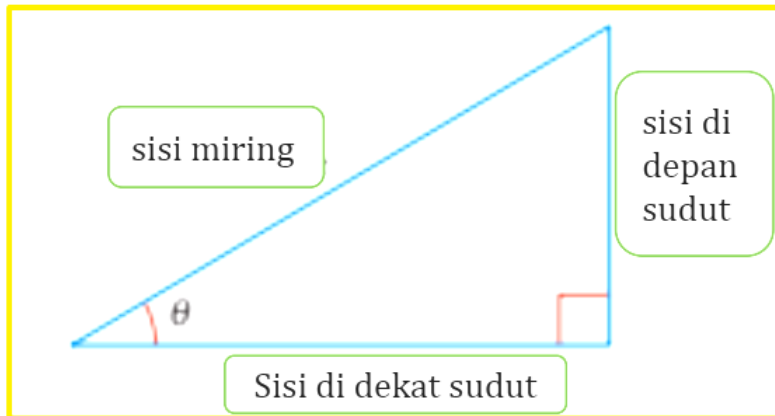


Fungsi Trigonometri



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Definisi fungsi trigonometri berdasarkan segitiga siku-siku



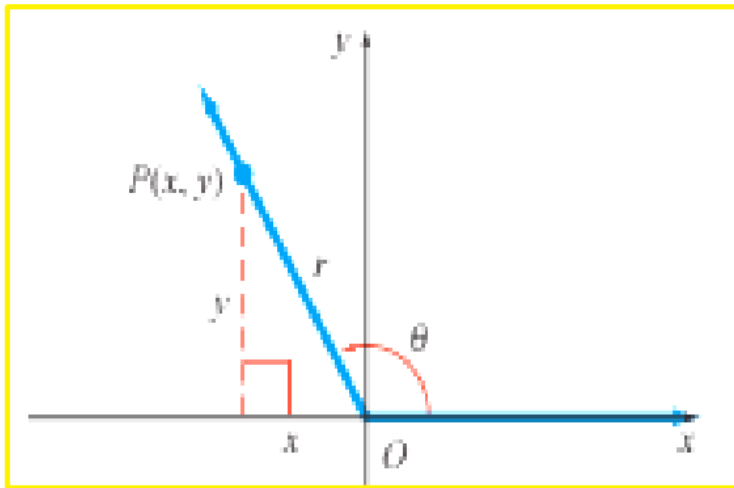
$$\sin \theta = \frac{\text{panjang sisi di depan sudut}}{\text{panjang sisi miring}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{panjang sisi di dekat sudut}}{\text{sisi miring}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{panjang sisi di depan sudut}}{\text{panjang sisi di dekat sudut}}$$



Definisi fungsi trigonometri pada sebarang sudut



Misal $P(x, y)$ sebarang titik yang bukan titik asal
 θ sudut yang dibentuk oleh $\overrightarrow{OP}$ dengan sumbu- x
positif dan $r = |\overrightarrow{OP}|$. :

Didefinisikan :

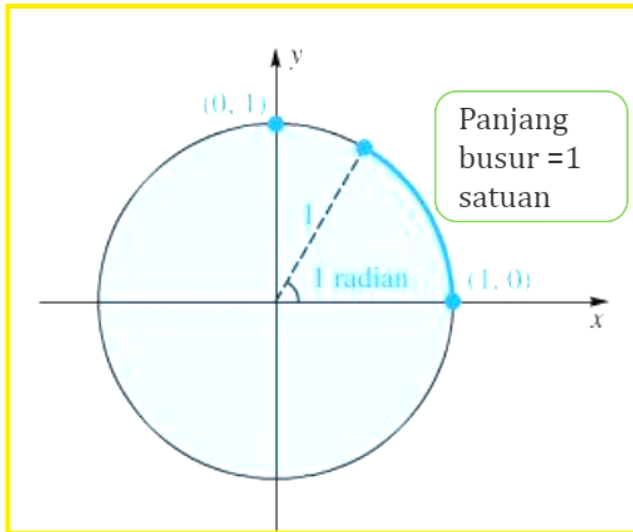
$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

<https://www.geogebra.org/m/Ba2ftYQn>



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



1 radian didefinisikan sama dengan besar sudut yang berkaitan dengan busur yang panjangnya 1

$$180^\circ = \pi \text{ radians} \approx 3.1415927 \text{ radians}$$

$$1^\circ = \frac{\pi \text{ radian}}{180}$$

$$1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$1 \text{ radian} \approx 57.29578^\circ \quad 1^\circ \approx 0.0174533 \text{ radian}$$

<https://www.geogebra.org/m/gyjXV6ng>

<https://www.geogebra.org/m/QtqDBqJg>

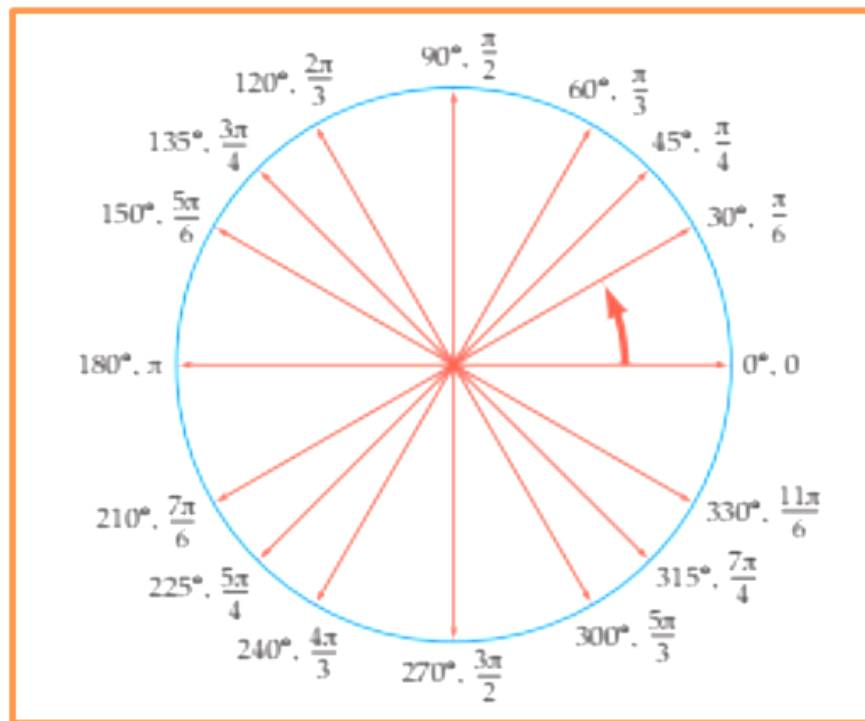


UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Dalam
derajat

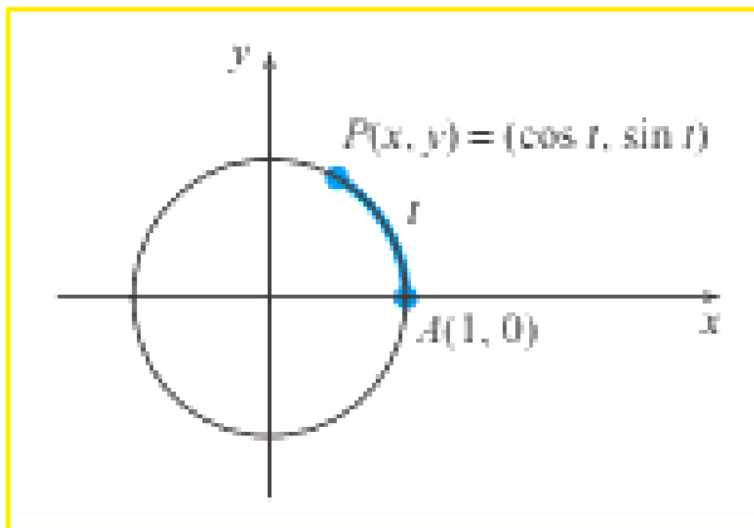
Dalam
radian

0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$
150	$5\pi/6$
180	π
210	$7\pi/6$
225	$5\pi/4$
240	$4\pi/3$
270	$3\pi/2$
300	$5\pi/3$
315	$7\pi/4$
330	$11\pi/6$
360	2π



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Definisi fungsi trigonometri berdasarkan lingkaran satuan



Diberikan lingkaran satuan dan titik $A(1,0)$

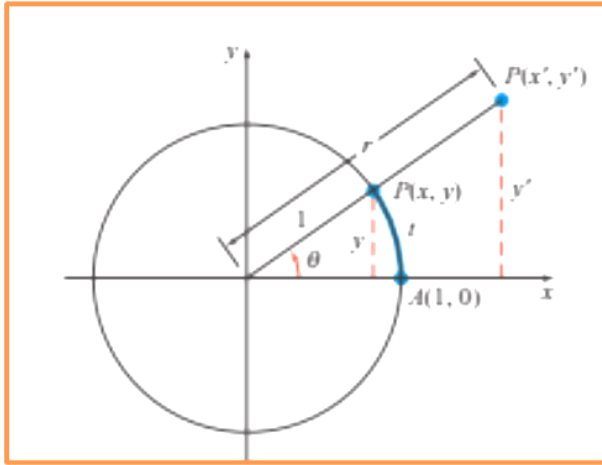
Misal t sebarang bilangan riil, maka terdapat tepat satu titik $P(x, y)$ demikian sehingga panjang busur AP sama dengan $|t|$. Didefinisikan :

$$\sin t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x}$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \qquad \sec t = \frac{1}{x} \qquad \cot t = \frac{x}{y}$$

Catatan : jika $t < 0$ busur AP ditelusiri dalam arah berlawanan jarum jam





Misal $P(x, y)$ sebarang titik pada lingkaran satuan

θ sudut yang dibentuk $\overrightarrow{OP}$ dengan sumbu- x positif

$P'(x', y')$ sebarang titik pada perpanjangan $\overrightarrow{OP}$ dan $|\overrightarrow{OP'}| = r$

Maka $\frac{y'}{y} = \frac{r}{1}$

$$\frac{y'}{r} = \frac{y}{1}$$

$$\sin \theta = \sin t$$

Nilai $\sin$ pada bilangan riil t sama dengan nilai $\sin$ pada sudut yang besarnya t radian



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Fungsi

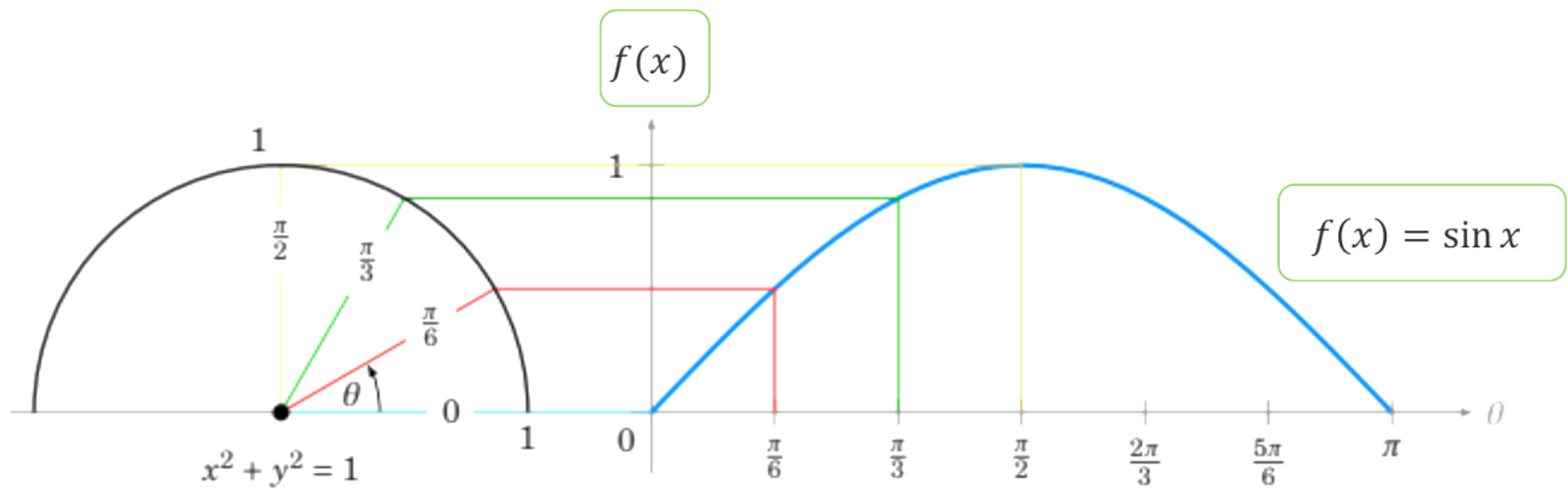
Daerah Asal

Daerah Hasil

$y = \sin t$	$\{t \mid -\infty < t < \infty\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \cos t$	$\{t \mid -\infty < t < \infty\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \tan t$	$\left\{t \mid -\infty < t < \infty, t \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}$	$\{y \mid -\infty < y < \infty\}$
$y = \csc t$	$\{t \mid -\infty < t < \infty, t \neq n\pi\}$	$\{y \mid y \geq 1, y \leq -1\}$
$y = \sec t$	$\left\{t \mid -\infty < t < \infty, t \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}\right\}$	$\{y \mid y \geq 1, y \leq -1\}$
$y = \cot t$	$\{t \mid -\infty < t < \infty, t \neq n\pi\}$	$\{y \mid -\infty < y < \infty\}$



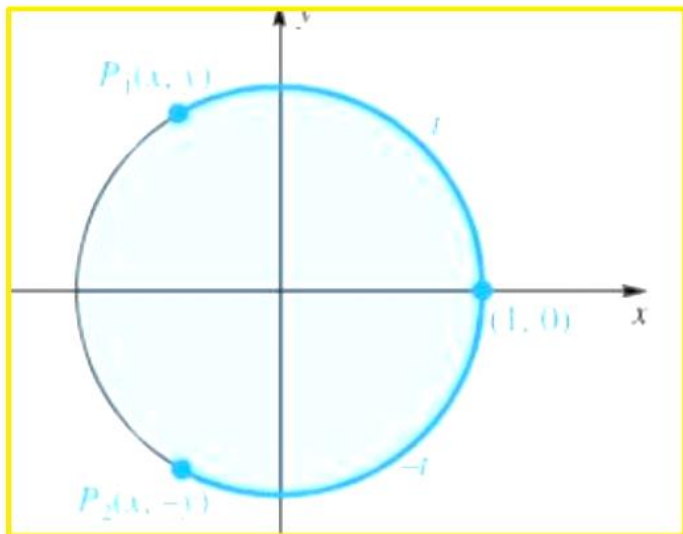
UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



<https://www.geogebra.org/m/Z26WBQgM>



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



Untuk semua bilangan riil t , berlaku

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \cos(-t) = \cos t \quad \tan(-t) = -\tan t$$

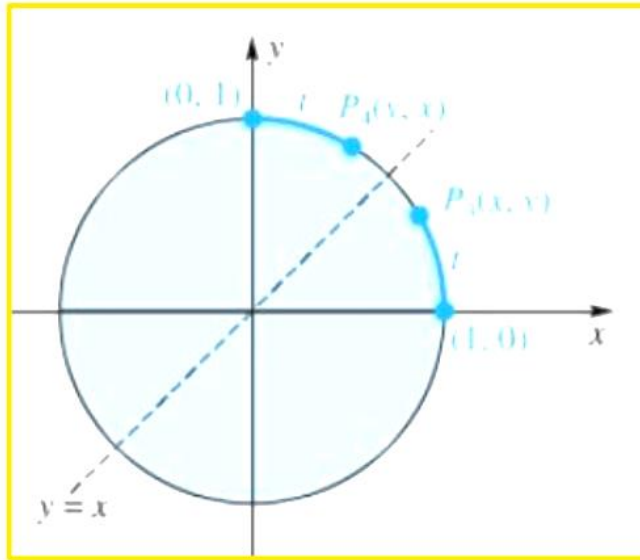
$$\csc(-t) = -\csc t \quad \sec(-t) = \sec t \quad \cot(-t) = -\cot t$$

Fungsi $\sin$, $\tan$, $\csc$, $\cot$, adalah fungsi ganjil
 Fungsi $\cos$ dan $\sec$ adalah fungsi genap

<https://www.geogebra.org/m/mbfErC66>



UNS
 UNIVERSITAS
 SEBELAS MARET

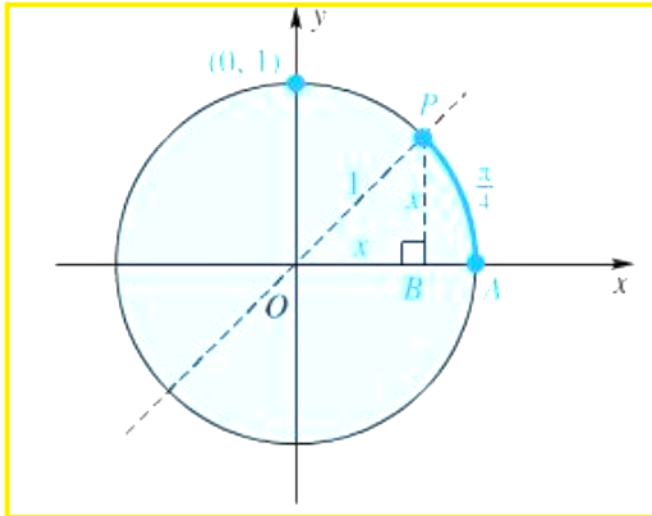


$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



Pada lingkaran satuan

$$1 - x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$1 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^2$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

t	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1



Untuk setiap bilangan riil t dan k , berlaku :

$$\sin(t + 2k\pi) = \sin t$$

$$\cos(t + 2k\pi) = \cos t$$

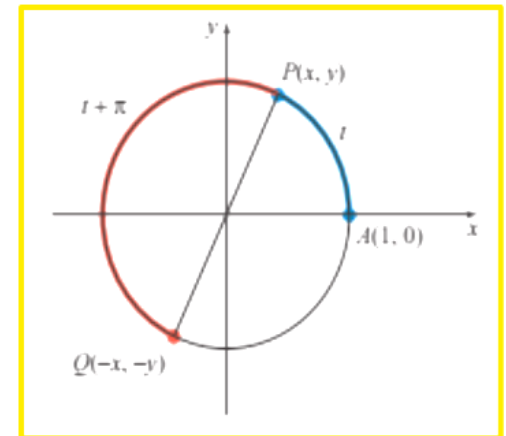
$$\sec(t + 2k\pi) = \sec t$$

$$\csc(t + 2k\pi) = \csc t$$

$$\tan(t + k\pi) = \tan t$$

$$\cot(t + k\pi) = \cot t$$

Ilustrasi



$$\tan t = \tan(t + \pi)$$



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Definisi

Fungsi f dikatakan periodik jika terdapat p sedemikian sehingga $f(x + p) = f(x)$ untuk setiap x di daerah asal

Bilangan positif terkecil p yang demikian disebut periode

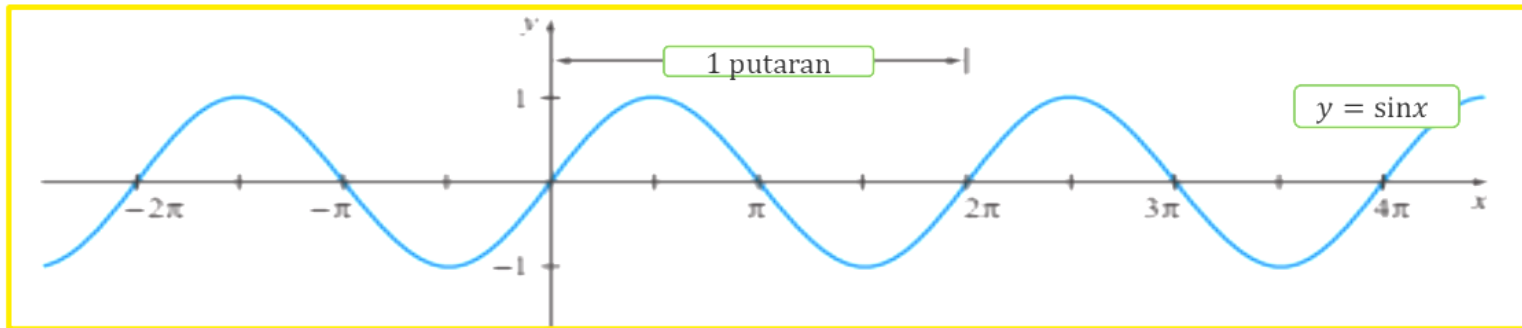
Fungsi-fungsi trigonometri adalah fungsi periodik

Periode fungsi sin, cos, sec dan csc adalah 2π

Periode fungsi tan dan cot adalah π



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



Daerah asal

Daerah hasil

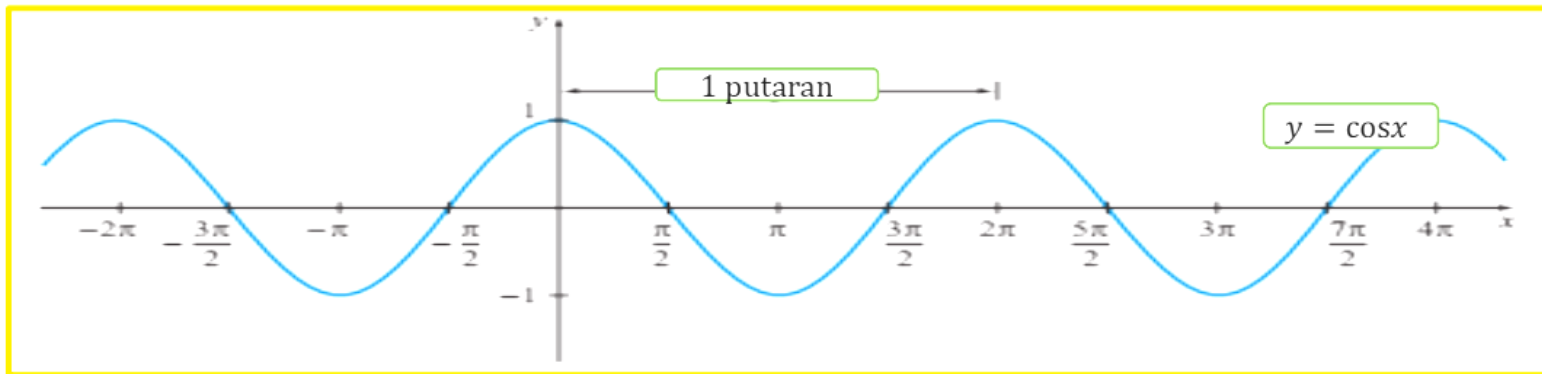
Periode

Simetri

Titik potong dengan sumbu- x



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



Daerah asal

Daerah hasil

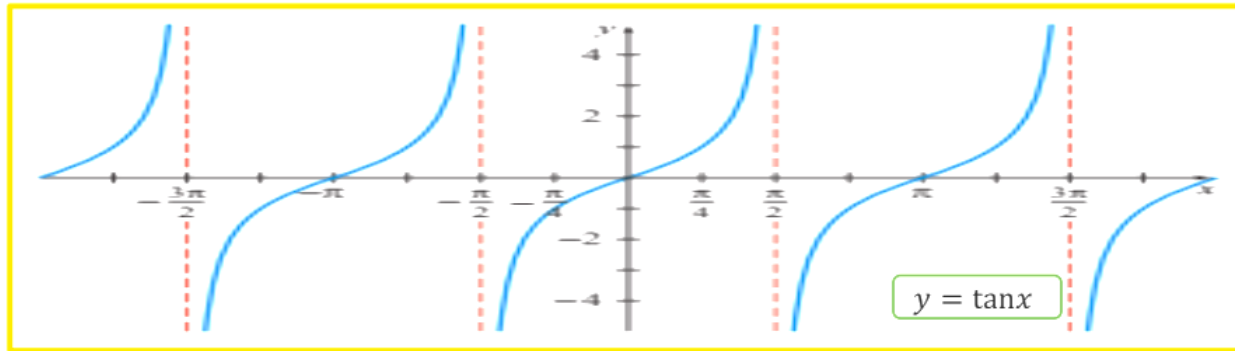
Periode

Simetri

Titik potong dengan sumbu- x



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET



Daerah asal

Daerah hasil

Periode

Simetri

Titik potong dengan sumbu- x



UNS
UNIVERSITAS
SEBELAS MARET

Identitas Trigonometri

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$



$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$



$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

