BAB III
GARIS LURUS

A. Persamaan Garis Lurus

Sebuah garis lurus dalam ruang ditentukan secara analitik sebagai garis potong antara dua bidang datar. Jadi merupakan himpunan titik-titik yang memenuhi persamaan-persamaan :

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Apabila ingin menyatakan suatu persamaan garis lurus ℓ, maka ditulis,

$\ell \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Catatan : Jika tidak ada keterangan, maka yang disebut garis adalah garis lurus.

Selain cara di atas, persamaan suatu garis dapat ditulis dalam berbagai bentuk yaitu :

1. Persamaan Parameter Suatu Garis

Jika (x_1, y_1, z_1) adalah sebuah titik dari suatu garis dan cosinus arahnya $\cos\alpha$, $\cos\beta$, dan $\cos\gamma$, maka untuk tiap-tiap titik (x, y, z) dari garis itu berlaku :

$$x - x_1 = r\cos\alpha, \qquad y - y_1 = r\cos\beta, \qquad z - z_1 = r\cos\gamma$$

di mana r adalah jarak dari titik (x, y, z) ke (x_1, y_1, z_1).

Persamaan-persamaan :

$$\boldsymbol{x = x_1 + r\cos\alpha, \qquad y = y_1 + r\cos\beta, \qquad z = z_1 + r\cos\gamma}$$

membentuk suatu susunan persamaan-persamaan parameter garis melalui (x_1, y_1, z_1) dengan sudut-sudut arah α, β, γ, parameter r menyatakan jarak dari sebuah titik sebarang dari garis itu ke titik tetap (x_1, y_1, z_1).

Untuk sebuah garis melalui O dinyatakan oleh persamaan-persamaan:

$$\boldsymbol{x = r\cos\alpha, \qquad y = r\cos\beta, \qquad z = r\cos\gamma}$$

2. Persamaan Garis Melalui Sebuah Titik

Pelenyapan parameter r dari persamaan-persamaan :

$x = x_1 + r\cos\alpha$, $y = y_1 + r\cos\beta$, $z = z_1 + r\cos\gamma$

memberikan persamaan-persamaan sebuah garis melalui titik (x_1, y_1, z_1) dengan sudut-sudut arah α, β dan γ yaitu :

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}$$

Jadi sebuah garis melalui pusat suatu O, dinyatakan dengan :

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}$$

Jika kita ganti cosinus-cosinus arahnya dengan bilangan-bilangan arah a, b, dan c maka garis yang melalui titik (x_1, y_1, z_1) dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

dan garis yang melalui O dapat ditulis :

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Dari bilangan-bilangan arah a, b, dan c kita temukan cosinus-cosinus arahnya yaitu :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3. Persamaan Garis Melalui Dua Titik

Misalkan dua titik P(x_1, y_1, z_1) dan Q(x_2, y_2, z_2) telah ditentukan dan ditanyakan persamaan garis melalui P dan Q.

Tiap-tiap garis melalui P(x_1, y_1, z_1) ditentukan oleh :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Di sini a, b, c harus dipilih demikian sehingga titik Q(x_2, y_2, z_2) terletak pada garis itu, jadi dengan demikian sehingga :

$$\frac{x_2 - x_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{b} = \frac{z_2 - z_1}{c}$$

Eliminasi a, b, dan c memberikan persamaan-persamaan yang dicari yaitu :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

B. Bidang-bidang yang Memproyeksikan Sebuah Garis

Andaikan kita akan menentukan bidang-bidang yang memproyeksikan suatu garis $\ell \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ terhadap bidang-bidang koordinat. Bidang-bidang ini diperoleh dengan menghilangkan *x*, *y*, dan *z* dari persamaan garis tersebut.

Jadi bidang yang memproyeksikan, sejajar dengan sumbu y ditemukan dengan melenyapkan *y*, persamaannya menjadi berbentuk :

x = mz + p

dan persamaan bidang yang memproyeksikan sejajar dengan sumbu *x* : *y* = nz + q di mana :

$$m = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

dan

$$p = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad q = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

yang mudah untuk mencarinya.

C. Bilangan-bilangan Arah Garis Sebarang

1. Jika garis ditentukan oleh persamaan-persamaan : *x* = mz + p, *y* = nz + q z=0

Dua persamaan-persamaan ini dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{x-p}{m} = \frac{y-q}{n} = \frac{z-0}{1}$$

Maka dapat kita lihat bahwa garis itu melalui titik (p, q, 0) dan bahwa bilangan-bilangan m, n, dan 1 adalah bilangan-bilangan arah garis itu.

Maka cosinus-cosinus arahnya adalah :

$$\cos\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}} \qquad \cos\beta = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{m^2+n^2+1}}$$

2. Jika sebuah garis ditentukan oleh persamaan-persamaan :

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ dan $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

maka koefisien-koefisien m dan n :

$$m = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad n = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

sehingga sebagai bilangan-bilangan arah garis itu dapat diambil :

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Karena bilangan-bilangan ini adalah sebanding dengan m, n dan 1.

Kita dapat mengingat bilangan-bilangan arah dalam bentuk determinan ini dari matrik :

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, yang merupakan koefisien-koefisien dari *x*, *y*, dan *z* dalam persamaan-persamaan yang ditentukan.

D. Sudut Antara Dua Garis

Andaikan dua garis masing-masing dengan bilangan-bilangan arah a_1, b_1, c_1 dan a_2, b_2, c_2 maka sudut θ yang dibentuk oleh dua garis tersebut dapat ditentukan dengan rumus :

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Sedang syarat untuk sejajar adalah :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Dan syarat untuk kedudukan tegak lurus :

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

E. Kedudukan Garis dan Bidang Datar

Sebuah bidang datar ditentukan oleh persamaan: Ax + By + Cz + D = 0 maka bilangan A, B dan C adalah bilangan-bilangan arah bidang datar itu yang sesuai dengan bilangan-bilangan arah normal pada bidang datar tersebut.

Andaikan : $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, adalah persamaan garis dengan bilangan-bilangan arah a, b, dan c.

Garis itu sejajar dengan bidang datar apabila garis tersebut tegak lurus pada normal bidang datar itu, jadi :

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

dan garis itu tegak lurus pada bidang datar tersebut jika garis tersebut sejajar dengan normal bidang tersebut jadi jika :

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

Sedangkan untuk menentukan koordinat titik potong antara garis dan bidang datar tersebut dengan cara menentukan nilai-nilai x, y dan z dari sistem persamaan :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

F. Garis Tegak Lurus Persekutuan dari Dua Garis Saling Bersilangan

Jika dua garis ℓ_1 dan ℓ_2 ditentukan oleh :

$\ell_1 \equiv V_1 = 0,\ V_2 = 0$

$\ell_2 \equiv V_3 = 0,\ V_4 = 0$

Maka pasangan persamaan-persamaan :

$L \equiv V_1 + \lambda\ V_2 = 0,\ \ V_3 + \mu\ V_4 = 0$

Untuk tiap-tiap pasangan harga dari λ dan μ akan menyatakan suatu garis yang memotong ℓ_1 dan ℓ_2. Persamaan-persamaan ini menyatakan semua garis-garis yang memotong kedua garis yang ditentukan.

Jika kita menentukan λ dan μ demikian hingga garis potong ini tegak lurus pada ℓ_1 maupun pada ℓ_2, maka dengan memasukkan nilai-nilai λ dan μ itu ke dalam persamaan :

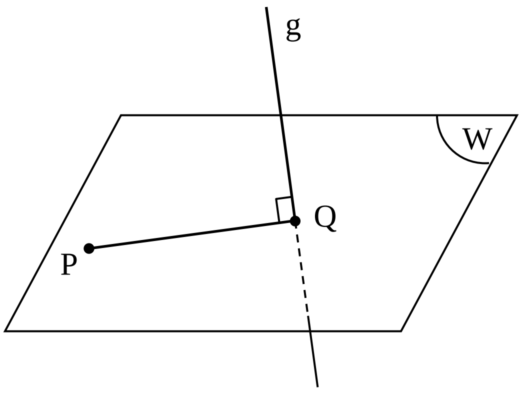
$V_1 + \lambda\ V_2 = 0, \qquad V_3 + \mu\ V_4 = 0$

Kita mendapatkan persamaan garis tegak lurus persekutuannya.

G. Jarak Sebuah Titik ke Sebuah Garis

Jarak $P(x_1, y_1, z_1)$ ke garis g dapat kita cari sebagai berikut :

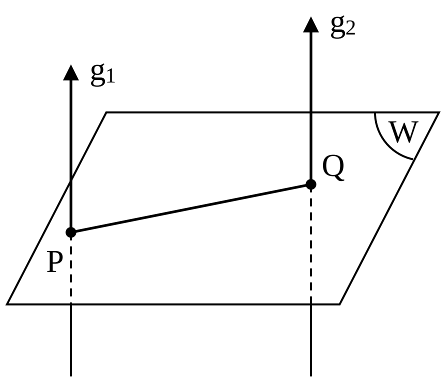
1. Buat bidang datar W melalui P tegak lurus g.
2. Cari titik Q, yaitu titik tembus g pada W.
3. Garis PQ adalah suatu garis yang tegak lurus g dan melalui titik P sehingga panjang PQ adalah jarak titik P ke garis g (lihat gambar 15).



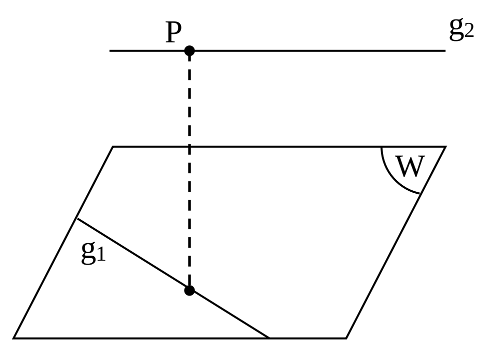
Gambar 15

H. Jarak Antara Dua Garis

1. Bila g_1 dan g_2 sejajar, untuk menghitung jaraknya dapat kita lakukan sebagai berikut :
   a. Pilihlah sebarang titik P pada g_1.
   b. Buat bidang datar W melalui P dan tegak lurus g_1, yang dengan sendirinya juga tegak lurus g_2.
   c. Tentukan Q, yaitu titik temus g_2 pada W.
   d. Panjang PQ adalah jarak antara g_1 dan g_2 (lihat gambar 6).



Gambar 16



Gambar 17

2. Bila g_1 dan g_2 bersilangan, kita lakukan sebagai berikut :
   a. Buat bidang datar W yang melalui g_1 dan sejajar g_2.
   b. Pilih sebarang titik P pada g_2.
   c. Tentukan jarak P ke bidang W yang merupakan jarak antara g_1 dan g_2 (lihat gambar 17).

Contoh 1.

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik P(2,–1,1) dan memotong garis-garis $g_1 \equiv 2x + y - 4 = 0 = y + 2z$ dan $g_2 \equiv x + 3z = 4,\ 2x + 5z = 8$.

Penyelesaian :

Garis lurus $2x + y - 4 + \lambda\,(y + 2z) = 0,\ x + 3z - 4 + \mu\,(2x + 5z - 8) = 0$ …… (i) selalu memotong g_1 dan g_2, untuk setiap λ dan μ.

Karena melalui P(2,–1,1) : (i) $\rightarrow$ $-1 + \lambda = 0$ dan $1 + \mu = 0$, atau $\lambda = 1$, $\mu = -1$. Yang bila disubstitusikan ke (i) menghasilkan : $x + y + z = 2$, $x + 2z = 4$, merupakan persamaan garis yang diminta.

Contoh 2.

Tentukan persamaan garis g yang melalui titik P(1,0,–1); terletak pada bidang $V \equiv x + 3y + z = 0$ serta tegak lurus garis $g_1 \equiv x + 2y - z = 3$, $2x - 3y + 5z = 1$.

Penyelesaian :

Garis g hanya mungkin bila titik P terletak pada bidang V. Ternyata terpenuhi :

$1 + 3 \cdot 0 - 1 = 0$. Jadi P terletak pada bidang V.

Misalkan, bilangan arah garis g : a, b, c, karena g terletak pada V berarti g tegak lurus normal dari V $\rightarrow$

$a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 1 = 0$

atau $a + 3b + c = 0$ .... (i)

Bilangan arah g_1 adalah 7, –7, –7 atau 1, –1, –1.

Karena $g \perp g_1$ berarti $a - b - c = 0$ .... (ii)

Dengan menyelesaikan persamaan (i) dan (ii) diperoleh $a = -b$, $c = -2b$. Dan karena g melalui P(1,0, –1) maka persamaan garis g adalah :

$$\frac{x-1}{-b} = \frac{y-0}{b} = \frac{z+1}{-2b} \quad \text{atau} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

Contoh 3.

Tentukan persamaan garis g yang melalui titik P(1,–2, –3), sejajar bidang

$V \equiv 2x + y - 2z = 0$ dan menyilang tegak lurus garis $g_1 : x - 4z = 1$, $y + 3z = 2$.

Tentukan pula jarak dari awal sumbu ke garis g.

Penyelesaian :

Bilangan arah g_1 adalah 4, –3, 1

Misalkan bilangan arah garis g : a, b, c.

Karena g // bidang datar V $\rightarrow$ $2a + b - 2c = 0$ .... (i) dan g tegak lurus $g_1 \rightarrow 4a - 3b + c = 0$ .... (ii)

Dengan menyelesaikan (i) dan (ii) diperoleh : b = c dan a = $\frac{1}{2}$ c.

Karena g melalui (1, −2, −3), maka persamaan garis g adalah :

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}c} = \frac{y+2}{c} = \frac{z+3}{c}, \quad \text{atau} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$$

Untuk mencari jarak titik O(0,0,0) ke g, kita buat bidang U melalui O(0,0,0) tegak lurus g yaitu : U = $x + 2y + 2z = 0$.

Misal titik tembus g pada U adalah Q dapat dicari sebagai berikut :

$g \equiv x = 1 + \lambda,\ y = -2 + 2\lambda,\ z = -3 + 2\lambda$

Substitusikan pada persamaan bidang U diperoleh :

$(1 + \lambda) + 2(-2 + 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) = 0$ atau $\lambda = 1$.

Titik tembus Q (2,0, −1).

Jadi jarak O ke g adalah : OQ = $\sqrt{2^2 + 0^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$.

Contoh 4.

Tentukan jarak garis g_1 : $\frac{(x-2)}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$ dan g_2 : $\frac{x}{2} = \frac{(y-4)}{3} = z - 8$.

Penyelesaian :

Jelas g_1 // g_2

Pilihlah P(2, 0, 2) pada g_1.

Persamaan bidang datar W melalui P dan tegak lurus g_2

$W \equiv 2(x - 2) + 3(y - 0) + (z - 2) = 0$,

atau $2x + 3y + z - 6 = 0$ .... (i)

Mencari titik Q, yaitu titik tembus g_2 pada W :

g_2 kita tulis dalam persamaan parameter :

$x = 2\lambda$, $y = 4 + 3\lambda$, $z = 8 + \lambda$ .... (ii)

dan disubstitusikan ke (i) :

$2(2\lambda) + 3(4 + 3\lambda) + (8 + \lambda) - 6 = 0$ didapat

$14\lambda + 14 = 0$ atau $\lambda = -1$.

Jadi Q (−2, 1, 7). Berarti jarak antara g_1 dan g_2 adalah :

$$PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-0)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{42} = 2\sqrt{13}$$

I. Soal-soal Latihan

1. Tentukanlah bidang-bidang yang memproyeksikan terhadap bidang-bidang koordinat dari garis lurus, jika persamaan-persamaannya adalah :
   a. $x + y + z = 2$ dan $x - y - z = 3$
   b. $2x - y = 3$ dan $x - y + 2z = 1$

2. Turunkanlah dari persamaan-persamaan parameter :
   $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$
   dari garis lurus yang melalui titik-titik x_1, y_1, z_1 dan x_2, y_2, z_2 dengan λ suatu parameter, menjadi persamaan-persamaan :
   $$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z}$$

3. Jika garis lurus ℓ_1 dan ℓ_2 ditentukan oleh persamaan-persamaan dengan bentuk:
   $$\ell_1 \equiv \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \qquad \ell_2 \equiv \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$
   Maka syarat supaya ℓ_1 dan ℓ_2 terletak pada sebuah bidang datar yang sama adalah :
   $$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$
   Buktikan!

4. Tentukan titik potong garis lurus ℓ dengan bidang V, jika :
   $\ell \equiv x + y - 1 = 0$, $2x - 3y + z = 5$, $V \equiv 2x + y + 5z + 7 = 0$

5. a. Tentukan persamaan garis lurus melalui $(-1,3,2)$ dan tegak lurus : $x + 2y + 2z = 3$, tentukan pula titik tembus garis tersebut pada bidang tersebut.
   b. Tentukan koordinat titik tembus garis lurus yang ditarik dari titik asal, tegak lurus bidang $V \equiv 2x + 3y - 6z + 49 = 0$, pada V. Tentukan pula bayangan titik asal pada bidang V.

6. Tunjukkan bahwa kedua garis lurus ini sejajar, hitung jaraknya :
   $x + 2y = 6$, $z - 2 = 0$ dan $x + 2y = 9$, $z = 0$.

7. Tentukan persamaan bidang yang memuat garis-garis :

$(x-4) = \dfrac{(y-3)}{-4} = \dfrac{(z-2)}{5}$ dan $(x-3) = \dfrac{(y+2)}{-4} = \dfrac{z}{5}$

8. Tentukan jarak :

   Titik (4, –5, 3) ke garis $\dfrac{(x-5)}{3} = \dfrac{(y+3)}{-4} = \dfrac{(z+6)}{5}$

9. Tentukan persamaan garis yang melalui P dan memotong tegak lurus garis g bila : P(2,4, –1) dan g ≡ $(x + 5) = \dfrac{(y-3)}{4} = \dfrac{(z+6)}{-9}$

10. Tentukan persamaan garis yang sejajar $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ dan memotong garis-garis $9x + y + z + 4 = 5x + y + 3z$ dan $x + 2y - 3z - 3 = 0$, $2x - 5y + 3z + 3 = 0$.

11. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (–4, 3, 1) sejajar :

    $x + 2y - z = 5$ serta memotong garis lurus $\dfrac{(x+1)}{3} = \dfrac{(y-3)}{2} = -(z-2)$.

    Tentukan pula titik potongnya!

12. Tentukan persamaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis $y - 2z = 0$, $x - 2z = 3$ dan terletak seluruhnya pada bidang $x + 3y - z + 4 = 0$.

13. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik (2,3,4) tegak lurus sumbu X dan memotong garis $x = y = z$.

14. Tentukan jarak dan persamaan garis hubung terpendek garis-garis :

$$\frac{(x-3)}{2} = \frac{(y+15)}{-7} = \frac{(z-9)}{5} \text{ dan } \frac{(x+1)}{2} = \frac{(y-1)}{1} = \frac{(z-9)}{-3}$$

15. Bilangan-bilangan arah garis ℓ_1 adalah a_1, b_1, c_1 dan dari garis ℓ_2 adalah a_2, b_2, c_2. Tentukan bilangan-bilangan arah sebuah garis, yang berdiri tegak lurus pada ℓ_1 dan ℓ_2.

16. Dari sebuah titik tetap P, koordinat-koordinatnya adalah (0,1,0) dan koordinat titik $Q(\lambda, 0, \lambda(1 + \lambda^2)$.

    Tentukanlah persamaan garis PQ dan dari garis tegak lurus persekutuan dari PQ dan sumbu Z.

    Tentukanlah juga persamaan-persamaan tempat kedudukan PQ dan dari garis tegak lurus persekutuan itu, jika λ suatu parameter.

17. Tentukanlah persamaan garis ℓ melalui titik (1,–1, –3); yang sejajar dengan bidang $2x + y - 2z = 0$ dan menyilang tegak lurus garis lurus $x - 4z = 1$, $y + 3z = 2$. Setelah itu tentukan jarak dari awal sumbu ke garis ℓ.

18. Ditentukan titik-titik $A(0,-1,4)$, $B(0,6,4)$ dan $C(2,0,0)$, diminta untuk menentukan sebuah titik D pada sumbu X sehingga AC berdiri tegak lurus pada BD dan buktikan, bahwa dengan demikian juga BC berdiri tegak lurus pada AD. Tentukan juga jarak antara garis-garis lurus AC dan BD.